PRINCIPALES DISTRIBUCIONES EN EL ANALISIS MULTIVARIADO

JOSE ANTONIO DIAZ GARCIA

TESIS

Presentada como requisito parcial
para obtener el grado de
Maestro en Ciencias
Especialidad de Estadística Experimental

UNIVERSIDAD AUTONOMA AGRARIA
ANTONIO NARRO
PROGRAMA DE GRADUADOS
Buenavista, Saltillo, Coah.
Julio de 1985

Tesis elaborada bajo la supervisión del comité particular de asesoría y aprobada como requisito parcial para obtar al grado de

MAESTRO EN CIAECIAS ESPECIALIDAD
ESTADISTICA EXPERIMENTAL

COMITE PARTICULAR

Asesor principal: ______________________
M.C. Víctor Cantú Hernández

Vocal: ______________________
M.C. Emilio Padrón Corral

Vocal: ______________________
M.C. Regino Morones Reza

Vocal: ______________________
M.C. Félix de J. Sánchez Pérez

____
Dr. Jesús Torralba Elguezabal
Subdirector de Asuntos de Postgrado

Buenavista, Saltillo, Coahuila. Julio 1985

Agradecimientos

Por medio de la presente quiero agradecer a:

Víctor Cantú Hernández, por su colaboración y sus valiosos comentarios y aportaciones

Los sinodales **Emilio Padrón Corral**, **Regino Morones Reza** y **Félix de J. Sánchez P.**, por sus comentarios en la revisión final de este trabajo.

El **Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología** por su apoyo económico

Carmen Leticia Ayala López, que tan pacientemente mecanografió este trabajo.

Y en forma especial a:

Luis Antonio Pérez González, por su orientación y aportaciones en el desarrollo de la sección 4.2.

Rolando Cavazos Cadena, por su ejemplo y ayuda en el desarrollo del capítulo II.

A todos mis maestros por sus enseñanzas y consejos.

A Patty

COMPENDIO

Principales Distribuciones en el
Análisis Multivariado

POR
JOSE ANTONIO DIAZ GARCIA

MAESTRIA
ESTADISTICA EXPERIMENTAL
UNIVERSIDAD AUTONOMA AGRARIA ANTONIO NARRO
BUENAVISTA, SALTILLO, COAHUILA. JULIO 1985

M.C. Víctor Cantú Hernández -Asesor-

Palabras claves: Multivariado, Normal, Wishart, T.

El presente trabajo consiste en un estudio formal de las matrices aleatorias y sus principales propiedades. Además se presentan las distribuciones multivariadas más importantes, como son: las distribuciones Normal, Wishart, T y F, para las cuales son encontradas sus caracteristicas principales, tales como: función de densidad, función caracteristica, momentos, distribucion marginal y condicional, así como definir las distribuciones Wishart, T y F no centradas.

La originalidad de este trabajo estriba en obtener las distribuciones Wishart, T y F a partir de la distribución Normal con argumento matricial y no con argumento vectorial como son estudiadas en los libros clásicos de análisis multivariado.

ABSTRACT

Principal Distributions in
Multivariate Analysis

BY

JOSE ANTONIO DIAZ GARCIA

MASTER OF SCIENCE
EXPERIMENTAL STATISTICS
UNIVERSIDAD AUTONOMA AGRARIA ANTONIO NARRO
BUENAVISTA, SALTILLO, COAHUILA. JULY 1985

M.S. Víctor Cantú Hernández

Key words: Multivariate, Normal, Wishart, T.

The present work consist of the fornal study of random matrices and their principal properties. Furthermore show the multivariate -- distributions:Normal, Wishart, T and F, also their principal caracteristics such as: density function, caracteristic function, moments, marginal and conditional distributions. Moreover it feature the Wishart, T and F non-central distributons.

The work was developed in accordauce to the normal distribution with matrix argument and without vectorial argument, which is not the same as it used to be in the classical books of multivariate analysis.

SIMBOLOGIA

$\|A\|$	Determinante de A
A'	Transpuesta de A
A^{-1}	Inverso de A
A^{-}	Inverso generalizado
$\bar{A}^{-}$	Matriz triangular superior
I_p	Matriz identidad $p \times p$
$\dot{\bar{A}}$	Matriz Hermitiana
$\mathrm{tr}\ A$	Traza
J	Jacobiano
dp	Definida positiva
N.S.	No singular
S.M.	Simétrica
$I_i \times I_j$	Producto cartesiano
$\otimes$	Producto Kronecker
$\oplus$	Suma directa
$\mathbb{R}^{mxm}$	Espacio euclidiano nxm dimensional
$\mathbb{C}^{mxm}$	Espacio complejo nxm dimensional
Gl(m)	Grupo real lineal
O(m)	Grupo ortogonal
$\|\|X\|\|$	Valor absoluto
$X \in \mathbb{R}^{mxn}$	Matriz de orden $m \times n$

$X \in \mathbb{R}^n$	Vector
$X \in \mathbb{R}$	Variable
V.A.	Variable aleatoria
Vc.A.	Vector aleatorio
M.A.	Matriz aleatoria
β_{nxp}	σ-campo de Borel
Ω	Espacio muestral
£	σ-campo
P	probabilidad
f.d.	Función de densidad
$\bar{f}_{(t)}$	Cualquier función con argumento complejo
$dF = f_{(x)}dx$	Si la función de distribución F tiene función de densidad
F.C.	Función característica $[\phi_X(T)]$
$*$	Convolución
$\Gamma_{(t,k)}$	Función gama multivariada $\Gamma_{(t)} = \Gamma_{(t,0)}$
$_pF_q$	Notación de Pochhamner de las funciones hipergeométricas
A_k	Función de Bessel
L_k^γ	Polinomio de Laguerre
H_k^γ	Polinomio de Hermite
$\{X_i\}_{i=1}^n$	$= X_1, X_2, \ldots, X_n$
$\sim$	Se distribuye
SYS	Si y sólo si
$\forall$	Para todo
$\ni$	Tal que
$\Rightarrow$	Por lo tanto

CONTENIDO

INTRODUCCION

Uno de los problemas dentro del Análisis Estadístico Multivariado es el definir las funciones de densidad que se presentan al tratar de resolver un problema por medio de esta técnica, así como el establecer las principales propiedades de dichas densidades.

El objetivo de este trabajo es el generalizar las principales densidades (Normal, Wishart, T y F) que son definidas en los trabajos citados en la bibliografía, así como el proponer algunas otras funciones de densidad, además de encontrar sus propiedades y el obtener nuevas expresiones para las mismas.

A continuación se resumen los principales temas abordados en este trabajo.

En primer lugar, consta de un capítulo en el cual se citan algunas definiciones y resultados del Algebra Lineal, los cuales aparecen con frecuencia en el desarrollo de la tesis.

Como segundo capítulo, se definen las Funciones Hipergeométricas, Polinomio Zonales (Series de Potencias) y de Laguerre con argumento matricial, así como sus principales propiedades y relaciones entre ellos. Dichas funciones son imprescindibles en el desarrollo de la Teoría de las distribuciones no centradas (Wishart, T, F, no centradas).

Como en este trabajo se realza la importancia de la función característica en la Teoría de las Distribuciones, se presenta un tercer capítulo en el cual se aborda dicho tópico, además de dar una definición formal de Matriz Aleatoria.

Como punto central se presenta el cuarto capítulo el cual está subdividido en cuatro secciones. En la primera de ellas se define la distribución normal de una Matriz Aleatoria y sus propiedades más importantes. Algunos resultados destacados de esta sección son: presentar una forma alternativa para obtener la Función de Densidad, que consiste en aplicar la fórmula de inversión de Cauchy para las transformadas de Fourier a la función característica de dicha densidad, además de obtener los dos primeros momentos a partir de la función característica y algunos resultados de importancia didáctica.

En la segunda sección titulada Distribución Wishart, se define en primer lugar la Función Gama y como corolario a ésta, se obtiene la Distribución Wishart centrada y su función característica, además de la Distribución Wishart no centrada y para ambas sus principales propiedades. La variante (generalización) de esta distribución con respecto a la estudiada comunmente, es que la Matriz Wishart definida aquí, es la suma de productos de matrices aleatorias distribuidas normal y la Wishart clásica se define como la suma de productos de vectores aleatorios distribuidos normal.

Se define un nuevo producto que ayuda a proponer una expresión para la covarianza de la Matriz Wishart centrada y no centrada, como también se dan dos formas alternativas de expresar la Distribución Wi -

shart no centrada en función de los polinomios de Laguerre y Hedmite.

Es importante hacer notar que todas las distribuciones Wishart estudiadas en los trabajos citados en la bibliografía, son casos particulares de las distribuciones desarrolladas en esta sección, a excep - ción de los presentados en Pérez L.A. [53], [56], la cual es análoga a la presentada aquí, pero con diferentes propósitos.

En la tercera sección se define la Distribución T de una matriz aleatoria, se encuentran los momentos de dicha matriz y las Distribuciones T no centrada y De Cauchy.

Como cuarta y última sección, se estudian tanto la Distribu - ción F como la Distribución Beta para una matriz aleatoria. Aquí la generalización consiste en partir de la densidad Wishart Generalizada en la segunda sección. Además se definen la Distribución F no Central y la Función Característica de la Función Beta.

DEFINICIONES BASICAS

En el presente capítulo se tratarán algunos temas los cuales, - por presentar con gran frecuencia en el desarrollo de este trabajo, se ha decidido definirlos en forma separada.

2.1. Definición importante

Definición 2.1.1. Sea $\tilde{X} \in \mathbb{R}^{m\times r}$, tal que $X = \{x_j\}_{j=1}^{r}$ donde $x_j \in \mathbb{R}^m$ definimos a $\tilde{\tilde{X}}$ como:

$$\tilde{X} = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{vmatrix} , \qquad \tilde{\tilde{X}} \in \mathbb{R}^{mr}, \; x_j \in \mathbb{R}^m, \quad \forall \; j = 1,\ldots,r \qquad 2.1$$

2.2. Traza[1]

Definición 2.2.1. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. La traza de la matriz A, denotada por $tr(A)$, es definida, como la suma de los elementos de la diagonal, i.e.:

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \qquad 2.2$$

1 Un tratamiento más extenso sobre este tema está dado por Graybill F. A. (25)

Teorema 2.2.1. Sean A y $B \in \mathbb{R}^{mxn}$,

$$tr(AB') = \sum_i \sum_j a_{ij}\, b_{ij} = tr(B'A) = tr(A'B) = tr(BA') \qquad 2.3$$

Corolario 2.2.1. Sea $A \in \mathbb{R}^{mxn}$, entonces:

$$tr(A'A) = \sum_i^m \sum_j^m a_{ij}^2 = tr(AA') \qquad 2.4$$

Teorema 2.2.2. Sean $A \in \mathbb{R}^{mxn}$, $B \in \mathbb{R}^{nxr}$ y $C \in \mathbb{R}^{rxm}$, entonces:

$$tr(ABC) = tr(CAB) = tr(BCA) \qquad 2.5$$

Corolario 2.2.2. Sean A y $Q \in \mathbb{R}^{nxn}$, Q

$$tr(A) = tr(Q^{-1}\, A\, Q) \qquad 2.6$$

si Q es una matriz ortogonal, tenemos:

$$tr(A) = tr(Q'\, A\, Q\,) \qquad 2.7$$

Teorema 2.2.3. Sea $a \in \mathbb{R}$, entonces:

$$tr(a) = a \qquad 2.8$$

2.3. Producto Kronecker[1]

Definición 2.3.1. Sean $A \in \mathbb{R}^{q \times q}$ y $B \in \mathbb{R}^{p \times p}$. Luego el Producto - Kronecker (o directo) denotado por $\otimes$, se define como:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} b_{11}A & b_{12}A & \dots & b_{1p}A \\ b_{21}A & b_{22}A & \dots & b_{2p}A \\ \vdots & & & \\ b_{p1}A & b_{p2}A & \dots & b_{pp}A \end{pmatrix}, \quad (A \otimes B) \in \mathbb{R}^{pq \times qp} \qquad 2.9$$

en general: $A \otimes B \neq B \otimes A$ 2.10

A continuación se enlistan algunas de las principales propieda - des del Producto Kronecker.

$$aA \otimes bB = ab\ (A \otimes B) \qquad 2.11$$

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C) \qquad 2.12$$

$$(A \otimes B)' = A' \otimes B' \qquad 2.13$$

$$tr\ (A \otimes B) = tr\ (A)\ tr\ (B) \qquad 2.14$$

$$(A \otimes B)(F \otimes G) = (AF) \otimes (BG) \qquad 2.15$$

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1} \quad \text{(Si } A \text{ y } B \text{ son no singulares)} \qquad 2.16$$

$$(A \otimes B)^{-} = A^{-} \otimes B^{-} \qquad 2.17$$

$$|A \otimes B| = |A|^{p}\ |B|^{q} \quad (A \in \mathbb{R}^{q \times q},\ B \in \mathbb{R}^{p \times p}) \qquad 2.18$$

---

[1] Una definición formal sobre Producto Kronecker está dada por Hall, M. Jr. [27], pág 288, y Serge L. [65], pág 305, lo expuesto en esta sección puede ampliarse, remitiéndose a Graybill, F.A. [25]

2.4. Transformaciones y Jacobianos[1]

Teorema 2.4.1. El jacobiano de la transformación, denotado por J $Y = aX$, donde $X, Y \in \mathbb{R}^{p\times q}$ y $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, está dado por;

$$J = a^{pq} \qquad 2.19$$

Teorema 2.4.2. El J de la transformación $Y = aX$, donde $X,Y \in \mathbb{R}^{q\times q}$ simétricas, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, está dado por:

$$J = a^{\frac{1}{2}q(q+1)} \qquad 2.20$$

Teorema 2.4.3. El J de la transformación lineal $Y = AX$ donde - $Y, X \in \mathbb{R}^{p\times 1}$ y $A \in \mathbb{R}^{p\times p}$ es:

$$J = |A| \qquad 2.21$$

Corolario 2.4.1. El J de la transformación $X = A^{-1}Y$ donde $X,Y \in \mathbb{R}^{p\times 1}$ y $A \in \mathbb{R}^{p\times p}$ es:

$$J = |A^{-1}| = |A|^{-1} \qquad 2.22$$

Teorema 2.4.4. El J de la transformación $Y' = X'A$ donde $Y',X' \in \mathbb{R}^{1\times q}$ y $A \in \mathbb{R}^{q\times q}$ es:

$$J = |A| \qquad 2.23$$

Teorema 2.4.5. El J de la transformación $Y = AX$ donde $X,Y \in \mathbb{R}^{p\times q}$ $A \in \mathbb{R}^{p\times p}$

$$J = |A|^{q} \qquad 2.24$$

---

1 Ver Sirivastava M.S. & Knotri C.G. [71], Demer, W.L. y Olkin I. [14].

Teorema 2.4.6. El J de $Y = XA$, $Y,X \in \mathbb{R}^{p\times q}$, $A \in \mathbb{R}^{q\times q}$ es:

$$J = |A|^p \qquad 2.25$$

Teorema 2.4.7. El J de $Y = AXB$; $Y,X \in \mathbb{R}^{p\times q}$, $A \in \mathbb{R}^{p\times p}$ y $B \in \mathbb{R}^{q\times q}$ es:

$$J = |A|^q \; |B|^p \qquad 2.26$$

Teorema 2.4.8. El J de la transformación $Y = CXC'$ donde Y,X sm - $C \in \mathbb{R}^{p\times p}$

$$J = |C|^{p+1} \qquad 2.27$$

Corolario 2.4.2. El J de $Y = A^{-1}X\,A'^{-1}$; Y, X sm, $A \in \mathbb{R}^{p\times p}$ está - dado por:

$$J = |A|^{-(p+1)} \qquad 2.27$$

2.5. Funciones Hipergeométricas con argumento matricial

En la derivación de algunas distribuciones en el caso univariado se encuentran algunas integrales que no pueden ser representadas por funciones elementales.

La manera en que es resuelto este problema es con el uso de series de potencias. Este problema se presenta, en particular, al tratar de derivar las distribuciones χ^2 no central, F no central, t-Student no central y otras, las cuales quedan representadas por medio de las funciones Hipergeométricas y de Bessel (Searle S.P. [64]). Estas son casos especiales de la Función Hipergeométrica Generalizada (Erdelyi A. [18]) para valores enteros de p y q, utilizando la notación de Pochhammer - (Herz C.S. [28]); para denotar dichas funciones tenemos:

$$ {}_pF_q(a_1,\ldots,a_p;\ b_1,\ldots,\ b_q;\ x) \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \ \ldots \ (a_p)_k}{(b_1)_k \ \ldots \ (b_a)_k} \ \frac{x^k}{k^p} \qquad 2.28 $$

donde los coeficientes $(a)_k$ están dados por:

$$ (a)_k \ = \ a(a+1)\ldots(a+k-1) \ = \ \Gamma(a+k)/\ \Gamma(k) \qquad 2.29 $$

pudiendo ser ${}_pF_q$ una función real o compleja, dependiendo de los números $a_1,\ldots,a_p,\ b_1,\ldots,\ b_q,$ reales o complejos. A continuación daremos algunos casos especiales de las Funciones Hipergeométricas Generalizadas (Erdelyi A. [18]).

${}_0F_0\ (x) = e^x$ (exponencial) 2.30

${}_1F_0\ (a;x) = (1-x)^{-a}$ (Serie Binomial) 2.31

${}_0F_1\ (\frac{1}{2}n,\frac{1}{4}x^2) = \int_0^{\pi} e^{x\cos\theta}\ \mathrm{sen}^{n-2}\theta d\theta \ / \int_0^{\pi} \mathrm{sen}^{n-2}\theta d\theta$

F. Bessel (esta función aparece en la distribución χ^2 no central, Rao C.S. [64] 2.32

${}_1F_1\ (a,b;x)$ Hipergeométrica confluente (esta aparece en la función F no central, Searle, S.R. [64]) 2.33

${}_2F_1(a_1,a_2,b;x)$ Serie de Gauss o Gausiana (aparece en la obtención de la Distribución del Coeficiente Correlación Múltiple, Sirivastava & Khatri G.G. [71]) 2.35

Al derivar las correspondientes distribuciones multivariadas se requieren generalizaciones las ecuaciones 2.28 - 2.35 para lo cual es -

reemplazada la variable x por la matriz simétrica s y ${}_pF_q$ es una función simétrica real o compleja valuada en las raíces características de s (James A.T. Z36])

Un tratado sobre todo el sistema de Funciones Hipergeométricas con argumento matricial es dado por Herz C.S. [28]. Una forma diferente es estudiada por Contantine A.G. [10], [11], el cual hace una representación en series de potencias, para lo cual son necesarios algunos conceptos importantes, los cuales serán tratados en la sección 2.6.

A continuación definiremos las Funciones Hipergeométricas con argumento matricial, según Constantine [10].

Definición 2.5.1.

$$ {}_pF_q(a_1,\ldots,a_p;\ b_1,\ldots,\ b_q;\ S) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdots\ (a_p)_k}{(b\ )_k \cdots\ (b_q)_k} \frac{C_k(S)}{h!} \qquad 2.36 $$

en donde:

$$ (a)_k = \prod_{i=1}^{m} (a - \tfrac{1}{2}(i-1)_{h_i}, \qquad k = (h_1,\ldots,h_m) \qquad 2.37 $$

si a es tal que la Función Gama Multivariada, denotada por $\Gamma_m(a)$ Herz C. S. [28] está definida, la relación 2.37 se puede escribir como:

$$ (a)_k = \Gamma_m\ (a,\ k) / \ \Gamma_m(a) \qquad 2.38 $$

2.6. Polinomios Zonales

Una discusión detallada sobre Polinomios Zonales está dada por James A.T. [34], [35], [36] , Constantine A.G. [10]. Para definir los Po linomios Zonales son necesarios algunos conceptos sobre la Teoría de Representación de Grupos (James [35].)

Sea $S \in \mathbb{R}^{m\times m}$ simétrica, y $\phi(S)$ un polinomio de grado h en los $n=\frac{1}{2}m(m+1)$ diferentes elementos de la matriz S, entonces la transformación

$$\phi(S) \rightarrow \phi(L^{-1}SL'^{-1}) \qquad L \in GL(m) \tag{2.39}$$

define una representación del grupo lineal real $GL(m)$ Hall M. [27], James A.T. [31] en el espacio vectorial de todos los polinomios en S. El espacio V_h de los polinomios homogéneos de grado h, es invariante para toda $L \in \mathbb{R}^{m\times m}$ N.S. dada en la transformación 2.39 y se descompone en la suma directa de subespacios irreducibles[1] $V_h = \Sigma_k \oplus V_{h_1 k}$ donde $k=(h_1,h_2,\ldots,h_m)$, $h_1 \geq h_2 \geq \ldots \geq h_m \geq 0$ corre bajo todas las particiones de , en no más de m partes. Cada $V_{h,k}$ contiene un único subespacio dimensional invariante bajo el grupo ortogonal $O(m)$ Hall M. [27], Searle L [65], James A.T. [31]. Estos subespacios son generados por los Polinomios Zonales, $Z_k(S)$, los cuales surgen invariantes bajo el grupo ortogonal, es decir:

$$Z_k(H'SH) = Z_k(S), \qquad H \in O(m) \tag{2.40}$$

siendo polinomios homogéneos simétricos en las raíces características de S.

---

[1] Probado en Thrall, R.M. (1831). On symetrized Kronecker powers and the structure of the free Lio ring. Emer. I. of Math. 64:271-388, citado en James A.T. [36]

James A.T. [35] normalizó los $z_k(s)$ asumiendo que los coeficientes de s_1^k en $z_k(s)$ eran unos, donde $s_1 = trS$. Los cuales son calculados por:

$$C_k(S) = [\chi_{[2k]}(1)\ 2^h h!/(1h)!]\ Z_k(S) \qquad 2.41$$

donde $\chi_{[2k]}(1)$ es la dimensión de la representación $[2k]$ de un grupo simétrico Hall M. [27], James A.T. [31], sobre $2h$ símbolos James A.T. [35]. Un método de cálculo está dado por James A.T. [33], así como una tabla de polinomios $z_n(s)$, para órdenes mayores de $G(h = 6)$.

Los Polinomios Zonales son definidos sólo para $S \in \mathbb{R}^{mxm}$ sm.d.p. Además, si $S \in \mathbb{R}^{mxm}$ sm, y $R \in \mathbb{R}^{mxn}$ sm.d.p. entonces las raíces de RS son las mismas que las de $R^{\frac{1}{2}} SR^{\frac{1}{2}}$, donde $R^{\frac{1}{2}}$ es d.p., siendo la raíz cuadrada de R (dicha matriz es única), por consiguiente $C_k(RS) = C_k(R^{\frac{1}{2}} SR^{\frac{1}{2}})$ 2.42

La propiedad fundamental de los Polinomios Zonales está dada por la siguiente relación (James [33])

$$\int_{O(m)} C_k(H'SHT)\ d(H) = C_k(S)\ C_k(T)/C_k(I) \qquad 2.43$$

donde I es la matriz identidad, y $d(H)$ es la medida invariante de Haar sobre el grupo ortogonal (Silverger A.J. [68]).

2.7. Propiedades de los Polinomios Zonales y las Funciones Hipergeométricas con argumento matricial

En esta sección se dan algunas representaciones integrales, tanto de Polinomios Zonales como de F. Hipergeométricas. Además se enuncian algunas representaciones de las Funciones Hipergeométricas, en fun cion de los Polinomios Zonales.

Teorema 2.7.1. Sea $S \in \mathbb{R}^{mxm}$ sm.d.p., luego:

$$(\mathrm{tr}\ S)^k = \sum_k C_k(S) \quad \text{(James A.T. [34], [36])} \tag{2.43}$$

note que cuando $m=1$, la ecuación se convierte en la igualdad

$$x^k = C_{(k)}(x) \qquad x \in \mathbb{R} \tag{2.44}$$

de este modo los Polinomios Zonales de una variable matricial son los análogos de las series de potencias para variables en $\mathbb{R}$.

Teorema 2.7.2. Si $X \in \mathbb{R}^{kxn}$, $k \leqq n$, entonces:

$$\int_{O(m)} (\mathrm{tr}\ (XH))^{2h}\ d(H) = \sum_k \frac{(\frac{1}{2})_h}{(\frac{1}{2}m)_k} C_k\ (XX') \tag{2.45}$$

$H \in \mathbb{R}^{nxk}$

$$\int_{O(m)} C_k(SHTH')\ d(H) = \frac{C_k(S)\ C_k(T)}{C_k(I_m)} \tag{2.46}$$

(James A.T. [35])

Teorema 2.7.3. Sea $X \in \mathbb{C}^{mxm}$ sm. donde su parte real es d.p., y sea $T \in \mathbb{C}^{mxm}$ sm. arbitraria, entonces:

$$\int_{H>0} e^{\mathrm{tr}-XH} |H|^{t-\frac{1}{2}(m+1)} C_k(HT)\,dH = \Gamma_m(t,k)\,|X|^t C_k(TX^{-1}) \tag{2.47}$$

es válida para todo número complejo t que satisface la desigualdad $R(t) > \frac{1}{2}(m-1)$. La constante $\Gamma_m(t,k)$ está dada por:

$$\Gamma_m(t,k) = \Pi^{\frac{1}{4}m(m-1)} \prod_{i=1}^{m} \Gamma(t+h_i-\tfrac{1}{2}(i-1))$$

(Constantine A.G. [11])

Teorema 2.7.4. Si $X \in \mathbb{C}^{m \times m}$ d.p., entonces:

$$\int_{0}^{I} |S|^{t-\frac{1}{2}(m+1)} |I - S|^{u-\frac{1}{2}(m+1)} C_k(RS)\,dS = \frac{\Gamma_m(t,k)\Gamma_n(u)}{\Gamma_m(t+u,k)} C_k(R) \qquad 2.48$$

donde $\Gamma_m(u) = \pi^{\frac{1}{4}m(m-1)} \prod_{i=1}^{n} (u - \frac{1}{2}(i-1))$ (Constantine [11])

A continuación veremos algunos casos especiales de la ecuación - 2.36

$${}_0F_0 = e^{trX} = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{k} C_k(X)/h! \qquad 2.49$$

$${}_1F_0(a'X) = |I - X|^{-a} = \frac{1}{\Gamma_m(a)} \int_{H>0} e^{trH} e^{trHX} |H|^{a-\frac{1}{2}(m+1)} dH = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{k} (a)_k [C_k(Z)/h! \qquad 2.50$$

$${}_0F_1(\tfrac{1}{2}n;\ \tfrac{1}{4}XX') = \int_{O(n)} e^{trXH} d(H) = \frac{2^m \pi^{\frac{1}{2}mn}}{\Gamma_m(\frac{1}{2}n)} \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{k} \frac{C_k(XX')}{Z_k(I_n)\, 2^k h!} \qquad 2.51$$

donde:

$Z_k(I_n) - 2^h(\frac{1}{2}n)_k$ (Hertz C.S. [28], Constantine A.G. [10], James A.T. [36]) 2.52

De las igualdades anteriores y del Teorema 2.7.3. surgen las siguientes igualdades (Hertz, C.S. [28], Constantine A.G. [10], James A.T. [36]).

$$\frac{1}{\Gamma_m(a)} \int_{S>0} e^{-trS} |S|^{a-\frac{1}{2}(m+1)} {}_pF_q(a_1,\ldots,a_p;\ b_1,\ldots,b_q;\ ST)\ d(S)$$

$$= {}_{p+1}F_q(a_1,\ldots,a_p,a;\ b_1,\ldots,b_q,\ T) \qquad 2.53$$

$$\frac{2^{\frac{1}{2}m\,(m-1)}\Gamma_m(b)}{(2\Pi_i)^{\frac{1}{2}m(m+1)}}\int_{R(T)=X.>O} e^{trT}|T|^{-b}{}_pF_q\,(a_1,\ldots,a_p;\ b_1,\ldots,b_q;\ T'^{-1}S)\,d(T)$$

$$= {}_pF_{q+1}(a_1,a_2,\ldots,a_p;\ b_1,\ldots,b_q,\ b;S) \qquad 2.54$$

$$\frac{1}{\Gamma_m(a)}\int_{S>O} e^{-trS}|S|^{a-\frac{1}{2}(m+1)}{}_pF_q(a_1,\ldots,a_p;\ b_1,\ldots,b_q;\ S.T,U)\,d(S)$$

$$= {}_{p+1}F_q(a_1,\ldots,a_p,a;\ b_1,\ldots,b_q;\ T,U) \qquad 2.55$$

$$\frac{2^{\frac{1}{2}m(m-1)}\Gamma_m(b)}{(2\Pi_i)^{\frac{1}{2}m(m+1)}}\int_{R(T)>O} e^{trT}|T|^{-b}{}_pF_q(a_1,\ldots,a_p;\ b_1,\ldots,b_q;\ T^{-1}S,U)\,d(T)$$

$$= {}_pF_{q+1}\,(a_1,\ldots,a_p;\ b_1,\ldots,b_q,\ b;\ S,U) \qquad 2.56$$

Otras relaciones de las Funciones Hipergeométricas son enunciadas en Herz C.S. [28], de las cuales se dan algunas a continuación:

$$ {}_1F_1(a;b;X) = \frac{\Gamma_m\ (b)}{\Gamma_m(a)\Gamma_m(b-a)}\int_O^I e^{trXT}\ T^{\ a-\frac{1}{2}(m-1)}|I-T|^{b-a-\frac{1}{2}(m-1)}\,(dT) \qquad 2.57$$

$$ {}_2F_1(a_1,a_2;b;X)\ \frac{\Gamma_m\ (b)}{\Gamma_m(a)\Gamma_m(b-a)}\int_O^I |I-XT|^{-a_2}|T|^{a_1-\frac{1}{2}(m+1)}|I-T|^{b-a_1-\frac{1}{2}(m+1)}(dT) \qquad 2.58$$

además, las Funciones Hipergeométricas con argumento matricial satisfacen las relaciones de Kummer (Erdelyi A. [18])(Herz C.S. [28] pág. 489)

$$ {}_2F_1(a_1,a_2;b;S) = |I-S|^{-a_2}{}_2F_1(b-a_1,a_2;\ b;\ -S(I-S)^{-1})$$

$$= |I-S|^{b-a_1-a_2}\ {}_2F_1(b-a_1;\ b-a_2;\ b;S) \qquad 2.59$$

$$ {}_1F_1(a,b;S) = e^{trS}\ {}_1F_1(b-a:\ b;\ -S) \qquad 2.60$$

2.8. Polinomios de Laguerre con argumento matricial

En la derivación tanto de la distribución T como la F multivariada, es necesario expresar dichas funciones en términos de Polinomios de Laguerre generalizados. Dichos polinomios son desarrollados en los elementos de una matriz $S \in \mathbb{R}^{m\times m}$; es claro ver que cuando $m = 1$ las expresiones resultantes son los Polinomios de Laguerre clásicos. Un tratamiento exhaustivo, cuando $m = 1$, está dado en Erdelyi A. [18] para el caso $m > 1$ el lector puede referirse a Herz C.S. [28] y Constantine A.G. [11].

A continuación daremos algunos resultados relevantes sobre este tema.

Herz define los Polinomios de Laguerre L_σ^γ en función de la Función de Bessel, es decir:

$$e^{tr-M}\, L_\sigma^\gamma\, (M) = \int_{R>O} e^{tr-R} |R|^\gamma \sigma(R)\; A_\gamma(R^M)\; dR \qquad 2.61$$

donde $\sigma(R)$ es un polinomio homogéneo simétrico de la matriz R, $\gamma > -1$ y A_γ es la Función de Bessel, definida por

$$A_\gamma(M) = \frac{2^{\frac{1}{2}m(m-1)}}{(2\Pi P)^{\frac{1}{2}m(m+1)}} \int_{R(Z)>O} e^{trZ}\, e^{tr-MZ^{-1}} |Z|^{-\gamma\, -\frac{1}{2}(m+1)} d(Z) \qquad 2.62$$

$$= \frac{1}{\Gamma_m(\gamma + \frac{1}{2}(m+1))}\; {}_0F_1(\gamma + 1;\, M) \quad \text{(Herz C.S. (28)]} \qquad 2.63$$

y dada en términos de Polinomios Zonales por Constantine A.G. [10] como:

$$A_\gamma(M) = [1/\Gamma_m(\gamma + \tfrac{1}{2}(m+1))] \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{k} [C_k(-M)/(\gamma + \tfrac{1}{2}(m+1))_k h!] \qquad 2.64$$

la cual se obtiene a partir de la relación:

$$e^{trM} L_k^{\gamma}(M) = \int_{R>0} |R|^{\gamma} C_k(R)\ A_{\gamma}(RM)\ dR \qquad 2.65$$

luego sustituyendo 2.62 en 2.65, y reinvirtiendo el orden de integración obtenemos:

$$L_k^{\gamma}(M) = \Gamma_m(\gamma + \tfrac{1}{2}(m+1)_k)\,[2^{\frac{1}{2}m(m-1)}/(2\Pi_i)^{\frac{1}{2}m(m+1)}]$$

$$\int_{R(Z)>0} e^{trZ}|Z|^{-\gamma-\frac{1}{2}(m+1)} C_k(I - MZ^{-1})\,d(Z) \qquad 2.66$$

Esta ecuación es la Función Característica inversa (ver sec. 3.4)

$$\int_{M>0} e^{tr-MZ}\ |M|^{\gamma} L_k(M)\,dM = \Gamma_m(\gamma + p,k)\ |Z|^{-\gamma-\frac{1}{2}(m+1)} C_k(I - Z^{-1})$$

con la ecuación 2.66 es posible calcular los Polinomios de Laguerre, para lo cual expandiendo $C_k(I - MZ^{-1})$

$$\frac{C_k(I - MZ^{-1})}{C_k(I)} = \sum_{h=0}^{h} \sum_{\nu} (-1)^h a_{k,\nu} C_k(MZ^{-1}) / C_k\ (I) \qquad 2.67$$

y llevando a cabo la integral en 2.66 apoyándonos en la relación 2.47, obtenemos:

$$L_k^{\gamma}(M) = (\gamma+\tfrac{1}{2}(m+1))_k\ C_k(I)\sum_{n=0}^{h}(-1)^n[a_{k,\nu}/(\gamma+\tfrac{1}{2}(m+1)_{\nu}]\,[C_{\nu}(M)/C_{\nu}(I)] \qquad 2.68$$

no existe una fórmula explícita para $a_{k,\nu}$, pero es fácilmente determinada por la ecuación 2.67. Una tabla de estos valores se encuentra en Constantine A.G. [11].

De la ecuación anterior es fácil ver que si $M = 0$

$$L_k^{\gamma}(M) = (\gamma + \tfrac{1}{2}(m+1)_k\ C_k(I) \qquad 2.69$$

En seguida consideraremos la Función Generadora para los Polinomios de Laguerre (en el caso de $M = 1$, ver Erdelyi A. [18]).

Teorema 2.8.1. La Función Generadora para los Polinomios de La - guerre está dada por:

$$|I - Z|^{-\gamma - \frac{1}{2}(m+1)} \int_{O(m)} e^{tr - MH'Z(I-Z)^{-1}H}\, d(H) =$$

$$= |I - Z|^{-\gamma-\frac{1}{2}(m+1)} \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{k} [C_k(-M)\ C_k(Z(I-Z)^{-1})/h!\ C_k(I)]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k} [L_k^{\gamma}\ (M)\ C_k(Z)/h!\ C_k(I)]$$ Constantine Z.G. [11]

Algunas otras propiedades como la ortogonalidad de los Polino - mios de Laguerre, su convergencia, su relación con los Polinomios de - Hermite y otras, pueden ser encontradas en Constantine A.G. [10][11] y Herz C.S. [28].

MATRICES ALEATORIAS

3.1. Definición

Una función x definida en un espacio de probabilidades con valores en $\mathbb{R}^{nxp}$ es una matriz aleatoria si para todo hipercubo $I_1 X \ldots X_p$ tal que $I \in \mathbb{R}^n$

$$\{ \omega : X(a) \in I_1 X \ldots , XI_p \}$$

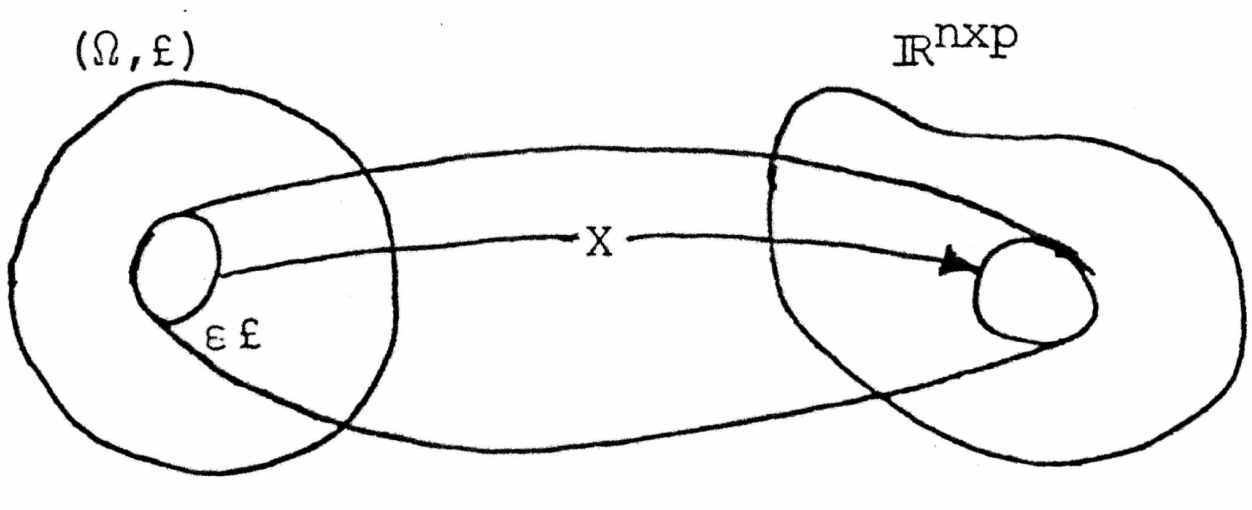
está en un σ-campo que aparece en el espacio de probabilidades.

Definición 3.1.1. Sea $(\Omega, \pounds, P)$ un espacio de probabilidad

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{nxp} \qquad 3.1$$

una función x se llama matriz aleatoria si para cada hipercubo $(a_1, b_1] X \ldots X (a_p, b_p]$, $[a_i, b_i] \in \mathbb{R}^n$

$$\{ \omega : X(\omega) \in (a_1, b_1] X \ldots X (a_p, b_p] \} \in \pounds$$



Supongamos que $x \in \mathbb{R}^{nxp}$, es una matriz aleatoria, entonces:

$$x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} \quad \text{donde} \quad x_i \in \mathbb{R}^{1xp} \qquad 3.2$$

una observación importante es que x es una matriz aleatoria SyS x_j $\mathbb{R}^{1xp}$ es un vector aleatorio para todo j.

Supongamos que $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ son vectores aleatorios, entonces:

$$\{\omega : x_j(\omega) \in (a_j, b_j]_{j=1\ldots n}\} \in \pounds \quad \forall j$$

por lo tanto:

$$\{\omega : X(\omega) \in (a_1, b_1] X \ldots X (a_n, b_n] =$$

$$= \bigcap_{j=1}^{n} \{\omega : x_j(\omega) \in (a_j, b_j]_{j=1,\ldots,n}\} \in \pounds, \; x_j \in \mathbb{R}^p \qquad 3.3$$

Ahora, si x es una matriz aleatoria, veremos que $\{\omega : x_1 \in (a,,b\,]\} \in \pounds$ para todo $(a_i, b_i] \in \mathbb{R}^p$

Observe que:

$$\{\omega : x_1(\omega) \in (a_1, b_1] = \{\omega : x_1(\omega) \in (a_1, b_1], x_2 \in \mathbb{R}^p, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^p\}$$

$$= \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\omega : x_1(\omega) \in (a_1, b_1], x_2 \in (-k_i, k_i], \ldots, x_n \in (-k_i, k]\}$$

$$= \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\omega : x_1(\omega) \in (a_1, b_1] X (-k_i, k_i] X \ldots X] (-k, k]\} \in \pounds \qquad 3.4$$

por lo tanto x_1 es un vector aleatorio, de modo semejante para todo x_j.

3.2. Funciones de Densidad y Distribución

Una distribución en $\mathbb{R}^{nxp}$ es una medida de probabilidad y definida en un σ-campo, que contiene a todos los conjuntos de la forma $(a_1, b_1]X\ldots X(a_n,b_n]$ tal σ-campo se llama σ-campo de Borel y es denotado por β_{nxp} Suponga que $x \in \mathbb{R}^{nxp}$ es una matriz aleatoria, esto significa que $\{\omega: X(\omega) \in E\} \in \pounds \;\forall\; E = (a_1,b_1]X\ldots X(a_n,b_n] \in \mathbb{R}^{nxp}$

De lo anterior sucede que:

$$\{\omega: \quad X(\omega) \in B\} \in \pounds \quad \forall \quad B \in \beta_{nxp} \qquad 3.5$$

Definición 3.2.1. La distribución de $x \in \mathbb{R}^{nxp}$ es una medida de probabilidad denotada por P_X y definida por:

$$P_X(B) = P\{\omega: X(\omega) \in B\} = P[X \in B] \quad \forall \in B \quad \beta_{nxp} \qquad 3.6$$

La matriz aleatoria x, es una matriz discreta, si existe un conjunto numerable $\{x_1,\ldots,x_n,\ldots\} \subset \mathbb{R}^{nxp}$ tal que:

$$\sum_J P_X(x_j) = \sum_J P[X_j = X_J] = 1 \qquad X_J \in \mathbb{R}^p \qquad 3.7$$

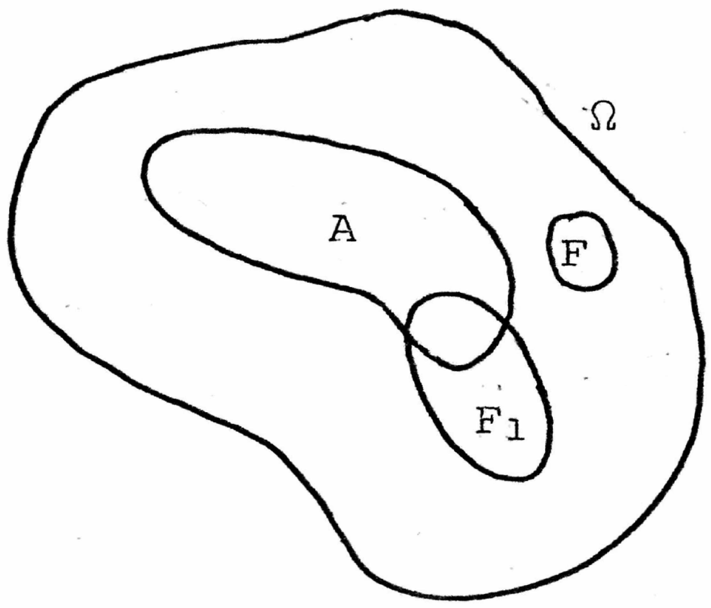
es decir, x es una matriz aleatoria discreta si P_X tiene un soporte numerable.

Considere un espacio de probabilidad $(\Omega,\pounds,P)$. Un conjunto de $A \in \pounds$ se llama soporte de P si:

$$P(F) = P(F \cap A) \qquad \forall \quad F \in \pounds$$

en otros términos, A es un soporte de P si $P(F) = 0$ para $F \subset A^c$

$F \varepsilon \mathcal{L}$



$F \subset A^c \Rightarrow P(F) = 0$

$P(F_1) = P(F_1 \cap A)$

A es un soporte si $P(A^c) = 0$, $P(A) = 1$

Una distribución P en $\mathbb{R}^{nxp}$ es absoltuamente continua si existe - una función

$$f: \mathbb{R}^{nxp} \rightarrow [0, \infty)$$

tal que

$$P[(a_1,b_1]X\ldots X(a_n,b_n) \ \varepsilon \ \mathbb{R}^{nxp}] = \int_{C=(a_1,b_1]X\ldots X(a_n,b_n]\varepsilon\mathbb{R}^{nxp}} f(x)\, dx \qquad 3.8$$

si tal función f existe, se llama densidad (Función de Densidad) para P

Observe que f satisface:

i) $f(x) \geqq 0 \quad \forall \quad X \ \varepsilon \ \mathbb{R}^{nxp}$ 3.9

ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{nxp}} f(x) = 1$ 3.10

Una matriz aleatoria X, es absolutamente continua si la distribución P_X es absolutamente continua, es decir, si existe una función f_X en $\mathbb{R}^{nxp}$, tal que:

$$P_X(C) = P[X \ \varepsilon \ C] = \int_C f_X(x)\, dx \quad \forall \quad c \ \varepsilon \ \beta_{nxp} \qquad 3.11$$

Ahora sea P una distribución en $\mathbb{R}^{nxp}$. La Función de Distribución Acumulativa de la Distribución P, es la función $F: \mathbb{R}^{nxp} \rightarrow [0, 1]$, y definida por:

$$F_X(x) = P\{(Y_1,\ldots,Y_n) \in \mathbb{R}^{nxp} \mid Y_1 \varepsilon X_1,\ldots,Y_n \leq X_n;\ X_i, Y_i \in \mathbb{R}^p\}$$

$$= \int_{T=(-\infty, X\,]X\ldots X(-\infty, X_n)]} dF = \int_T fy\, dy \qquad X \in \mathbb{R}^{nxp} \qquad 3.12$$

De la ecuación anterior es fácil ver la veracidad de la representación de $x \in \mathbb{R}^{nxp}$ en $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{np}$ dada en la definición 2.1.1.

En general, si una función de distribución proviene de una densidad, se tiene que para casi todos los puntos:

$$\partial X\ F(X) = f\ (x) \qquad 3.13$$

3.3. Vectores Independientes

Definición 3.4.1. n vectores son independientes si:

$$P[\{X_i = x_i\}_{i=1}] = \prod_{i=1}^{n} P[X_i = x_i] \qquad \forall\ X_i \in \mathbb{R}^p \qquad 3.14$$

En términos de funciones de probabilidad, la independencia de $\{x_i\}_{i=1}^n$ es equivalente a:

$$f_X(X_1,\ldots,X_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) \qquad x_i \in \mathbb{R}^p \qquad 3.15$$

La generalización de estos conceptos a matrices aleatorias es inmediata.

En los dos postulados anteriores cuando todos los vectores aleatorios x_i son elementos de $\mathbb{R}^p$, la función conjunta de n vectores x_i, no es mas que la función de probabilidad de una matriz aleatoria $x \quad \mathbb{R}^{nxp}$

$$f_X(x) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i} (x_i) \qquad \forall \quad x_i \in \mathbb{R}^p \qquad 3.16$$

por lo tanto cada función $f_{X_i}(x_i)$ es llamada función marginal de x_i.

Es importante mencionar que las anteriores tres secciones están basadas principalmente en Cavazos C.R. [9], apoyándonos además en Pérez G.L. [53],[57], ASH R.B. [6], Moncayo A.R. [49], Feller W. [19].

3.4. **Función Característica**

En la presente sección enunciaremos la función característica de distribuciones de probabilidad, conocida también como la Transformada de Fourier-Stieltejes, Cramer H. [12], Apostol T. [4], Bass J. [7], Feller [19], de distribuciones de probabilidad, la cual juega un papel muy importante en las funciones de distribución asociadas a la suma de entidades aleatorias (variables, vectores o matrices), así como en la obtención de los momentos de la distribución.

Una de las ventajas por la cual se ha decidido trabajar con la Transformada de Fourier y no con la Transformada de Laplace (Función Generadora de Momentos), es que la T. de Fourier existe aun cuando no estén definidos los momentos de la distribución de probabilidad.

Definición 3.4.1. Sea $x \in \mathbb{R}^{nxp}$ una matriz aleatoria definida en $(\Omega,\mathcal{E},P)$, con función de distribución F.

La función $\phi : \mathbb{R}^{nxn} \to C^{nxn}$ definida por

$$\phi_X(T) = E(e^{itr\ XT}) = \int_{X>0} e^{itrXT'}dF \qquad i = \sqrt{-1} \tag{3.17}$$

$$= \int_{X\geq 0} Cos_n\ TX'\ dF + i \int_{X>0} Sen_n TX' dF \tag{3.18}$$

se conoce como la Función Característica, Bochner S. [8], de la M.A. o como la Función Característica de la distribución F. En la ecuación - 3.18 las funciones sen y cos para matrices fueron estudiadas por Herz C.S. [28] (pág. 403) y las cuales están dadas por:

$$Cos_m S = \frac{1}{C_{m,m}} \int_{0(m)} e^{tr\ iuS} du$$

$$= \Pi_m(-\tfrac{1}{2})\ A^{(m)}_{-\frac{1}{2}} \quad (\tfrac{1}{4}\ S'S) \tag{3.19}$$

$$Sen_m S = \frac{1}{i^m} \ \frac{1}{C_{m,m}} \int_{0(m)} e^{tr\ iuS}\ |u|\ du$$

$$= \frac{\Pi_m(-\frac{1}{2})}{2^m}\ |S| \quad A_{+\frac{1}{2}}\ (\tfrac{1}{4}\ S'S) \tag{3.20}$$

en donde:

$$C_{m,m} = 2^m / \ \Gamma_m(\tfrac{1}{2}m)$$

$$\Pi_m(-\tfrac{1}{2}m) = \Gamma_m(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}(m+1)$$

y $A_\gamma(u)$ está dada por las relaciones 2.62 y 2.64

En el presente trabajo se analizan sólo funciones contínuas, - las cuales poseen función de densidad, luego la ecuación 3.17 puede escribirse como:

$$\phi_X(T) = \int_{X>0} e^{itTX'} \; f_X(x) \; dx \qquad 3.21$$

cuya fórmula de inversión está dada por (Bochner S. [8], Cramer [12], Herz X.S. [28], Constantine A.G. [10][11])

$$f(x) = \frac{2^{\frac{1}{2}m(m-1)}}{(2\Pi)^{\frac{1}{2}m(m+1)}} \int_{R(T)>X_0>0} e^{tr\, -iTX} \; \phi_X(T) \; dT \qquad 3.22$$

A continuación se ven algunas propiedades prácticas necesarias en el desarrollo del presente trabajo.

i). La función característica de $F * G$ está dada por:

$$\phi_G(T) \quad \phi_F(T)$$

ii) La función característica de la matriz $X \varepsilon \mathbb{R}^{nxn}$ está dada - por:

$$\phi_X(T) = E(e^{itr\, TX'}) = E(e^{i\sum_i t_i X_i}) = E(e^{i\sum_i \sum_j X_{ij} t_{ij}}) \qquad 3.24$$

$X \; \varepsilon \; \mathbb{R}^{nxn}$, m.a. $X_i \; \varepsilon \; \mathbb{R}^h$, vc.A; $X_{ij} \; \varepsilon \; \mathbb{R}$, v.a.

iii). Sea $X \; \varepsilon \; \mathbb{R}^{nxp}$ m.a. y $a \; \varepsilon \; \mathbb{R}$ constante, entonces la F.C. de - $W = aX$ está dada por:

$$\phi_W(T) = \phi_X(T) \qquad 3.25$$

iv) Sean $A \; \varepsilon \; \mathbb{R}^{mxn}$, $B \; \varepsilon \; \mathbb{R}^{pxr}$ y $C \; \varepsilon \; \mathbb{R}^{mxr}$ sea $Y = AXB + C$

Así, Y tiene la F.C. siguiente:

$$\phi_Y(T) = e^{itrCT} \; \phi_X(A'TB') \qquad 3.26$$

v) Sea $X = (X_1, X_2)$ donde $X_1 \in \mathbb{R}^{nxp}$; simultáneamente sea - $T = [T_1, T_2]$ donde $T_1 \in \mathbb{R}^{nxp}$, entonces la F.C. marginal de X_1 está dada por (Arnold S.F. [5]).

$$\phi_{X_1}(T_1) = \phi_{X_1}(T_1, 0) \qquad 3.27$$

de aquí podemos observar que X_1 y X_2 son independientes - S y S

$$\phi_X(T_1, T_2) = \phi_X(T_1, 0) \quad \phi_X(T_2, 0) \qquad 3.28$$

finalmente vemos que

$$\phi_{X'}(T) = \phi_X(T') \qquad 3.29$$

3.5. Momentos

Definición 3.5.1. La esperanza de la M.A. $X \in \mathbb{R}^{nxn}$, se define como:

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}^{nxn}} X \, dF(X) \qquad 3.30$$

siempre y cuando esta integral converja absolutamente, es decir:

$$\int_{\mathbb{R}^{nxn}} ||X|| \; dF(x) \qquad 3.31$$

De igual forma el ν-ésimo momento está dado por:

$$E(X^{\nu}) = \int_{\mathbb{R}^{nxn}} X^{\nu} \, dF(X) \qquad 3.31$$

Al igual que en el análisis univariado, los momentos pueden ser obtenidos a partir de función característica (Anderson T.W. [3]).

Para ver esto, utilizaremos la notación $\tilde{x}$ dada en la definición 2.1.1.

Luego:

$$\phi_X(T) = E(e^{itrXT'}) = E(e^{i\,\tilde{X}'\tilde{T}}) \qquad 3.33$$

derivando con respecto a $\tilde{T}$ obtenemos:

$$\phi'_X(T) = E(i\tilde{X}\;\; e^{itr\tilde{X}\tilde{T}}) \qquad 3.34$$

cambiando nuevamente de notación

$$\phi'_X(T) = E(i\;X\;e^{itrXT'}) \qquad 3.35$$

y evaluando en $T = 0$ obtenemos:

$$\phi'_X(0) = i\;E(X) \qquad 3.36$$

Luego el r-ésimo momento estará dado por:

$$\frac{1}{i^r}\;\phi_X^{(r)} = E(X^r) \qquad 3.37$$

PRINCIPALES DISTRIBUCIONES DE MATRICES ALEATORIAS

En el presente capítulo se derivarán las Funciones de Densidad Multivariadas con argumento matricial y sus principales propiedades.

4.1. Distribución Normal

En esta sección se obtiene la Distribución Normal de una M.A. - dicha distribución es muy importante dentro del Análisis Estadístico Multivariado ya que juega el mismo papel que la Distribución Normal para - una variable aleatoria, dentro de la Estadística Univariada.

Recordemos primeramente la Distribución Normal Estandar de - $Z \in \mathbb{R}^n$, la cual está dada por[1]:

$$f_Z(Z) = \frac{1}{(2\Pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Z_i} \qquad 4.1$$

Teorema 4.1.1. Sea $Z \in \mathbb{R}^{nxp}$ M.A. normal, entonces su función de densidad está dada por

$$f_Z(Z) = \frac{1}{(2\Pi)^{np/2}} e^{-\frac{1}{2}trZZ'} \qquad 4.2$$

Prueba: La prueba es inmediata utilizando las ecuaciones 3.15 y 2.4.

---

1 Esta es la distribución análoga a la N(0,1) o Normal Estándar

A continuación encontraremos la F.C. de la M.A. Z

Teorema 4.1.2. Sea $Z \quad \mathbb{R}^{nxp}$ M.A. con f.d. dada por 4.2, entonces su F.C. $\phi_Z(T)$ se puede escribir como:

$$Z(T) = e^{-\frac{1}{2}\, i\, \mathrm{tr}\, T'T}$$

Prueba: La demostración se sigue de las ecuaciones 3.24 y 2.4.

Teorema 4.1.3. Sea $Z \in \mathbb{R}^{nxp}$ teniendo como f.d. a 4.2. Sean además $A \in \mathbb{R}^{mxn}$, $B \in \mathbb{R}^{pxr}$ y $\mu \in \mathbb{R}^{nxr}$. Definamos $Y = AZB + \mu$, entonces:

$$\phi_Y(T) = e^{i\mathrm{tr}\mu'T - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(T'\Sigma T\Theta)} \qquad 4.4$$

Prueba: De las ecuaciones 3.26 y 4.3 tenemos:

$$\phi_Y(T) = e^{i\mathrm{tr}\mu'T - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\, BT'AA'TB'} \qquad 4.5$$

sean A y B[1] tales que:

$$\left.\begin{array}{l} A\,\Sigma^{-1}A' = I \Longrightarrow \Sigma = AA' \in \mathbb{R}_{mxm} \\ B'\,\Theta^{-1}B' = I \Longrightarrow \ = B'B \in \mathbb{R}^{rxr} \end{array}\right. \qquad 4.6$$

con la ayuda de la ecuación 2.5 y sustituyendo 4.6 en 4.5 se obtiene el resultado buscado.

Corolario 4.1.1. Si $Y \in \mathbb{R}^{mxr}$, M.A. con f.c. dada por 4.4; entonces:

$$Y \sim N_{nxr}(\mu, \Sigma, \Theta) \qquad 4.7$$

---

[1] Lo cual implica que Σ y Θ sean d.p.

La expresión anterior se lee: como Y se distribuye normal $m \times r$ con parámetros μ,Σ,Θ. Por lo general Θ es una matriz conocida (frecuentemente la identidad) y Σ es una matriz de parámetros desconocidos.

En seguida se enuncia un lema importante

Lema 4.1.1. Sean X y $T \in \mathbb{R}^{q \times p}$, y sean $\Sigma \in \mathbb{R}^{q \times q}$ y $\Theta \in \mathbb{R}^{p \times p}$ s.m. Entonces:

a) $\operatorname{tr} T'X = \tilde{T}' \tilde{X}$ 4.8

b) $\operatorname{tr} T' \Sigma T = \tilde{T}' (\Sigma \otimes \Theta)\tilde{T}$ 4.9

donde $\tilde{A}$ está dada en la definición 2.1.1. y $(B \otimes C)$ está dada por 2.9.

Prueba: La demostración es muy larga por lo cual sólo indicaremos el procedimiento a seguir para la prueba de ambos incisos. La demostración consiste en tratar de expresar ambos lados de la igualdad en términos de sumatorias. Para el caso en que todas las matrices son del mismo orden, la prueba es inmediata. (Arnold S.F. [5]).

Corolario 4.1.2. Sean $X,T \in \mathbb{R}^{q \times p}$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{q \times q}$ y $\Theta \in \mathbb{R}^{p \times p}$. Luego si $X \sim N{,}r(\mu,\Theta,\Sigma)$

$$\phi_X(t) = e^{i\operatorname{tr}\mu' T - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(T'\Sigma T\Theta)} = e^{i\tilde{T}'\tilde{\mu} - \frac{1}{2}\tilde{T}(\Sigma \otimes \Theta)\tilde{T}} = \phi_{\tilde{X}}(T) \qquad 4.10$$

La demostración se sigue del lema anterior. Esto permite asegurar que $\tilde{X}$ se distribuye N_{qp} con parámetros $\tilde{\mu}$, $\Sigma\otimes\Theta$ y se denota por:

$$\tilde{X} \sim N_{qp}(\mu \ , \ \Sigma \otimes \Theta) \qquad 4.11$$

lo cual es equivalente a decir que:

$$X \sim N_{qxp} \quad (\mu, \Sigma, \Theta) \tag{4.12}$$

Teorema [1] 4.1.4. Sea $Y \sim N_{mxr}(\mu\ ,\ \Sigma,\ \Theta)$ y sea $Y = (Y_{ij})$, $\mu = (\mu_{ij})$, $\Theta = (\Theta_{ij})$ y $\Sigma = (\sigma_{ij})$, entonces:

a) $E(Y_{ij}) = \mu_{ij}$ 4.13

b) $Var\ (Y_{ij}) = \sigma_{ii}\ \Theta_{jj}$ 4.14

c) $Cov\ (Y_{ij},\ Y_{i'j'}) = \sigma_{ii'}\ \Theta_{jj'}$ 4.15

Prueba: Sea Z como antes, entonces $E(Z_{ij}) = 0$, $Var(Z_{ij}) = 1$, $Cov(Z_{ij},\ Z_{i'j'}) = 0 \quad \forall\ i \neq i',\ j \neq j'$. Además sean Σ y Θ como en 4.6, entonces:

a) $$Y_{ij} = \sum_t \sum_v a_{it} Z_{tv}\ b_{vj} + \mu_{ij}$$

aplicando esperanza se tiene:

$$E(Y_{ij}) = \sum_t \sum_v a_{it}\ E(Z_{tv})\ b_{vj} + \mu_{ij} = \mu_{ij}$$

b) $$Cov\ (Y_{ij}, Y_{ij'}) = \sum_t \sum_v \sum_{t'} \sum_{v'} a_{it}\ b_{vj}\ a_{i't'}\ b_{v'j'}\ E(Z_{tv} Z_{t'v'})$$

$$= \sum_t a_{it} a_{i't} \sum_v b_{vj}\ v_{vj'} = \sigma_{ii'}\ \Theta_{jj'}$$

c) Para la varianza observe que:

$$Var(Y_{ij}) = Cov(Y_{ij}, Y_{ij})$$

De aquí se puede concluir que Θ representa la covarianza entre las columnas, de la expresión 4.16, es fácil observar que Θ_{jj} represen-

---

[1] Ver apéndice A

ta la covarianza entre las columnas j y j' y σ_{ii} representa la covarianza entre las hileras i e i' por lo cual la $\mathrm{cov}(Y_{ij}, Y_{i'j'})$ está dada por el producto de la covarianza entre las columnas j - j' y las filas i - i'. Esta idea puede verse más clara con la ayuda del siguiente teorema:

Teorema 4.1.5. Sea $X \in \mathbb{R}^{p\times n}$ M.A. tal que $X = \{X_i\}_{i=1}^{n}$ donde $X_i \in \mathbb{R}^{p\times 1} \sim N(\mu, \Sigma)$, e independientes para todo i, entonces:

$$f_X(X) = \frac{1}{(2\Pi)^{np/2}|\Sigma|^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}(X_j-\mu)'\,\Sigma^{-1}(X_j-\mu)} \quad \text{(Morrison D.F. [50])} \tag{4.16}$$

$$= \frac{1}{(2\Pi)^{np/2}|\Sigma|^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\sum_{j=1}^{N}(X_j-\mu)(X_j-\mu)'\Sigma} \tag{4.17}$$

$$= \frac{1}{(2\Pi)^{np/2}|\Sigma\otimes I|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\Sigma\otimes I)^{-1}(\tilde{X}\ J\otimes\mu)(\tilde{X}-J\otimes\mu)'} = f_{\tilde{X}}(\tilde{X}) \quad \text{(Giri N.C. [21])} \tag{4.18}$$

donde $J = (1,1,\ldots,1)' \in \mathbb{R}^{1\times n}$

Antes de probar el teorema, una observación importante puede ser hecha a partir de la ecuación 4.19, en la cual se pone de manifiesto nuevamente, el trabajar en forma indistinta con la matriz X o con $\tilde{X}$. (Note que $f_X(X) = f_{\tilde{X}}(\tilde{X})$)

Además observe que $J \otimes \mu = \tilde{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ donde para la ecuación 4.19 se cumple que $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_n$.

Prueba: Aplicando el mismo procedimiento utilizado en el desarrollo de 4.2 se tiene:

$$f_X(x) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(X_i) = \frac{1}{(2\Pi)^{pn/2}|\Sigma|^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(X_j-\mu)\Sigma^{-1}(X_j-\mu)} \tag{4.19}$$

Tomando solo el exponente de esta ecuación, es decir:

$$\sum_{j=1}^{n} (X_j - \mu)' \, \Sigma^{-1} (X_j - \mu) \in \mathbb{R} \qquad \text{(un escalar)}$$

Así, por el Teorema 2.2.3 y como Σ^{-1} no depende de j, la expresión 4.20, puede escribirse como:

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\Pi)^{np/2} |\Sigma|^{n/2}} \, e^{-\frac{1}{2} \operatorname{tr} \Sigma^{-1} \sum_{j=1}^{n} (X_j - \mu)(X_j - \mu)'} \qquad 4.20$$

Finalmente encontremos 4.19, para dicho propósito analicemos el término $|\Sigma|^{n/2}$, por 2.18 se sabe que:

$$|\Sigma|^{n/2} = |\Sigma|^{n/2} \, 1^{p/2} = |\Sigma|^{n/2} \, |I|^{p/2} = |\Sigma \otimes I|^{\frac{1}{2}}$$

ahora tomando el exponente en 4.21 observe:

$$\operatorname{tr}\Sigma^{-1} \sum_{j=1}^{n} (X_j - \mu)(X_j - \mu)' = \operatorname{tr}\left[\begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu \\ \vdots \\ \mu \end{bmatrix} \right]^{1} (\Sigma \otimes I)^{-1} \left[\begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu \\ \vdots \\ \mu \end{bmatrix} \right]$$

así:

$$= \operatorname{tr}(\tilde{X} - J \otimes \mu)' [\Sigma \otimes I]^{-1} (\tilde{X} - J \otimes \mu) \qquad 4.21$$

con lo cual queda probado el teorema, observe que 4.2.2. es un escalar, de aquí que 4.19, se puede escribir como:

$$f_X(X) = f_{\tilde{X}}(\tilde{X}) = \frac{1}{(2\Pi)^{np/2} |\Sigma \otimes I|^{\frac{1}{2}}} \, e^{\frac{1}{2}(X - J\otimes\mu)'(\Sigma\otimes I)^{-1}(X - J\otimes\mu)} \qquad 4.22$$

En la expresión anterior reafirmamos las definiciones de los parámetros Σ y , ya que como hipótesis de este teorema, se estableció que

$\{x_i\}_{i=1}^{n}$ donde $x_i \in \mathbb{R}^{p\times 1} \sim N(\mu,\Sigma)$ eran independientes entre sí ($\forall\, i = 1, 2, 3,\ldots,n$). Así el teorema arrojó como resultado que $\Theta = I$, es decir, que no existen covarianzas entre los vectores (columna) x_i's, subsecuentemente Σ nos representa la covarianza entre hileras.

En el siguiente teorema se da una forma más general del teorema anterior, es decir, se trata el caso en que en la M.A. x no existe independencia entre hileras, ni entre columnas.

Teorema 4.1.6. Si $x \in \mathbb{R}^{p\times n}$ tiene como F.C. a 4.10 (i.e. $[X \sim N_{p\times n}(\mu,\Sigma,\Theta)$ o $N_{pn}(\mu,\Sigma \otimes \Theta)]$ en función de densidad está dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\Pi)^{np/2}|\Sigma|^{n/2}|\Theta|^{p/2}}\, e^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\Sigma^{-1}(X-\mu)\,\Theta^{-1}(X-\mu)'} \qquad 4.23$$

o:

$$f_X(x) = f_{\tilde{X}}(\tilde{x}) = \frac{1}{(2\Pi)^{np/2}|\Sigma\otimes\Theta|^{\frac{1}{2}}}\, e^{-\frac{1}{2}(\tilde{X}-\tilde{\mu})'(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}(\tilde{X}-\tilde{\mu})} \qquad 4.24$$

Prueba[1]: La demostración de este teorema será dada a partir de la función inversa de la F.C., para lo cual utilizaremos la función inversa dada por Bochner S. [8], pág.689, a saber:

$$g_V(V) = \frac{1}{(2\Pi)^{\frac{1}{2}PN}} \int_T e^{\mathrm{tr}-iVT'}\, \phi_V(T)\, dT \qquad 4.25$$

para nuestro caso:

$$f_X(X) = \frac{1}{(2\Pi)^{\frac{1}{2}PN}} \int_T e^{\mathrm{tr}-iXT'}\, e^{\mathrm{tr}i\mu T'-\frac{1}{2}\mathrm{tr}T'\Sigma T\Theta}\, dT$$

---

1 Dos demostraciones alternativas pueden ser vistas en Arnold S.F. [5] y Pérez G.L. [53].

$$= \frac{1}{(2\Pi)^{\frac{1}{2}PN}} \int_T e^{tr-i(\tilde{X} - \tilde{\mu})\tilde{T}'} e^{-\frac{1}{2}trT'(\Sigma \otimes \Theta)T} dT$$

Haciendo la transformación $\tilde{T} = \sqrt{2\Pi}\, \tilde{\mu}$ cuyo jacobiano está dado - por $J = (2\ )^{PN/2}$, y de la igualdad 1.3[1] dada en Herz S.C. [28], obtene - mos: (tomando $k = 1$)

$$f_X(X) = \frac{1}{|\Sigma\otimes\Theta|^{\frac{1}{2}}} e^{-tr\pi(\tilde{X} - \tilde{\mu})'(\Sigma \otimes \Theta)^{-1}(\tilde{X} - \tilde{\mu})}$$

Finalmente haciendo la transformación $(\tilde{x} - \tilde{\mu}) = (\tilde{x} - \tilde{\mu})\frac{1}{\sqrt{2\Pi}}$ cuyo jacobiano está dado por $(2\Pi)^{-\frac{1}{2}np}$ se obtiene:

$$f_X(X) = \frac{1}{(2\Pi)^{\frac{1}{2}np}|\Sigma\otimes\Theta|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\tilde{X} - \tilde{\mu})'(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}(\tilde{X} - \tilde{\mu})}$$

La expresión 4.24 se obtiene en forma inmediata a partir de 4.9 y 2.18, con lo cual queda probado el teorema.

A continuación se presentan algunos teoremas en los cuales se - estudiarán algunas de las propiedades más importantes sobre la Distribu-ción Normal de una M.A.

Teorema 4.1.7. Sea $X \sim N(\mu,\Sigma,\Theta)$, con $\mu \in \mathbb{R}^{qxp}$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{qxq}$, $\Theta \in \mathbb{R}^{pxp}$ definidas positivas. Sean además $A \in \mathbb{R}^{qxq}$ y $B \in \mathbb{R}^{pxp}$ N.S. tales que - $A\Sigma A' = I$, $B'\Theta B = I$, entonces:

i) $AX \sim N(A\mu, I_q, \Theta) = N(\tilde{A\mu}, I_q \otimes \Theta)$ 4.26a

ii) $XB \sim N(\mu B, \Sigma, I_p) = N(\tilde{\mu B}, \Sigma \otimes I_p)$ 4.26b

---

1 La igualdad 1.3. es definida por:

$$e^{tr-(\pi SZ^{-1}S')} |Z|^{-\frac{1}{2}} = \int_{L_{k,m}} e^{tr-2\Pi iS'T} e^{tr-\Pi T]T'}$$

iii) $AXB \sim N(A\mu B, I_q, I_p) = N(A\tilde{\mu}B, I_q \otimes I_p)$ 4.26c

Prueba:

i) $\phi_{AX}(T) = E(e^{itr(AX)'T}) = E(e^{itrX'A'T}) = \phi_X(A'T)$

$= e^{itr\mu A'T-\frac{1}{2}itrT'A\Sigma A'T\Theta}$

$= e^{itr(A\mu)'T-\frac{1}{2}itr\ T'T\Theta}$

ii) $\phi_{XB}(T) = E(e^{itr(XB)'T}) = E(e^{itr\ TB'X'}) = \phi_X(TB')$

$= e^{itr\mu'TB'-\frac{1}{2}trBT'\Sigma TB'\Theta}$

$= e^{itr(B\mu)'T-\frac{1}{2}trT'\Sigma T}$

iii) $\phi_{AXB}(T) = E(e^{itr(AXB)'T}) = E(e^{itrXA'TB'}) = \phi_X(A'TB')$

$= e^{itr\mu'A'TB'-\frac{1}{2}trBT'A\Sigma A'TB'\Theta}$

$= e^{itr(A\mu B)'T-\frac{1}{2}trT'T}$

las igualdades en los incisos están dadas por 4.10

Teorema 4.1.8. Sea $x \sim N_{qxp}(\mu,\Sigma,\Theta)$

i) Si $a \in \mathbb{R}$, entonces $aX \sim N_{qxp}(a\mu, a^2\Sigma, \Theta)$ 4.27a

ii) $X' \sim N_{pxq}(\mu',\Theta,\Sigma)$ 4.27b

iii) Si $Q \in \mathbb{R}^{nxq}$, $C \in \mathbb{R}^{pxm}$ y $D \in \mathbb{R}^{nxm}$, entonces:

$$QXC + D \sim N_{n,m}(Q\mu C + D, Q\Sigma Q', C'\quad C)$$ 4.27c

Prueba:

i) $\phi_{aX}(T) = E(e^{itrX'aT}) = \phi_X(aT)$

$= e^{itra\mu'T-\frac{1}{2}trT'a\Sigma aT\Theta}$

$= e^{itr(a\mu)'T-\frac{1}{2}trTa^2\Sigma T\Theta}$

ii) $\phi_{X'}(T) = E(e^{itrX'T'}) = \phi_X(T')$

$$= e^{itr\mu'T'-\frac{1}{2}tr\ T\ \Sigma T'\Theta}$$

$$= e^{itr\mu T\ -\frac{1}{2}TrT'\Theta\ \ T\Sigma}$$

iii) De 3.26 se obtiene:

$$\phi_{(QXC+D)}(T) = e^{itrD'T}\ \phi_X(Q'TC')$$

$$= e^{itr[(Q\mu C)+D]'T-\frac{1}{2}trT'Q\Sigma QTC\Theta C}$$

Teorema 4.1.9. Distribución Marginal

Sea $X \sim N_{q,p}\ (\mu,\Sigma,\Theta)$, además:

$$X = (X_1,X_2),\ \mu = (\mu_1,\mu_2),\qquad = \begin{pmatrix}\Theta_{11} & \Theta_{12}\\ \Theta_{21} & \Theta_{22}\end{pmatrix} \qquad 4.28$$

donde X_1, $\mu_1 \varepsilon\ \mathbb{R}^{qxp}$ y $\Theta_{11}\ \varepsilon\ \mathbb{R}^{P_1xP_1}$, entonces:

$$X_1 \sim N_{qxp_1}(\mu,Z,\ \ _{11}),\ X_1 \sim N_{qxp-p_1}(\mu_2,\Sigma,\Theta_{22}) \qquad 4.29$$

Prueba: De 3.28 tenemos:

$$\phi_X(T_1T_2) = e^{it(\mu_1'\mu_2')\begin{pmatrix}T_1\\T_2\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\ tr(T_1T_2)\begin{pmatrix}\Theta_{11} & \Theta_{12}\\ \Theta_{21} & \Theta_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T_1'\\T_2'\end{pmatrix}\ \Sigma}$$

efectuando operaciones:

$$= e^{itr(\mu_1'T_1+\ _2'T_1)-\frac{1}{2}tr[T_1\ _{11}T_1'+T_2\ \ _{21}T'+T_1\ \ _{12}T_2+T_2\ \ _{22}T_2']\Sigma}$$

Finalmente de 3.27

$$\phi_{X_1}(T_1,0) = e^{itr\mu_1T_1-\frac{1}{2}trT_1'\Sigma T_1\ \Theta_{11}}$$

$$\phi_{X_2}(0,T_2) = e^{itr\mu_2'T_2-\frac{1}{2}trT'\Sigma T_2\ \Theta_{22}}$$

Teorema 4.1.10 Distribución Condicional

Sea $x \sim N_{q,p}(\mu,\Sigma,\Theta)$, además considere las particiones 4.29 entonces:

$$X_1/X_2 \sim N_{qxp_1}(\mu_1+(X_2-\Theta_2)\Theta_{22}^{-1}\Theta_{21},\ \Sigma\ \Theta_{11}-\Theta_{12}\Theta_{22}^{-1}\Theta_{21}) \qquad 4.30$$

Prueba: Se encontrarán dos matrices $w \in \mathbb{R}^{qxp}$ y $x \in \mathbb{R}^{qxp-p_1}$ independientes las cuales están dadas por:

$$W = X_1 - X_2\,\Theta_{22}^{-1}\Theta_{21} \quad \text{y} \quad X_2 = X_2 \quad \text{luego}$$

$$(W_1X_2) = (X_1,X_2)\begin{pmatrix} I & 0 \\ -\Theta_{22}^{-1}\Theta_{21} & I \end{pmatrix} = XC$$

por el teorema 4.17 se tiene:

$$XB \sim N_{qxp}(\mu B,\Sigma,\ B'\ \Theta\ B)$$

Analizando parámetro a parámetro

$$\mu B = (\mu_1,\mu_2)\begin{pmatrix} I & 0 \\ -\Theta_{22}^{-1}\Theta_{21} & I \end{pmatrix} = (\mu_1-\mu_2\Theta_{22}^{-1}\Theta_{12},\mu_2)$$

$$B'\ \Theta\ B = \begin{pmatrix} \Theta_{11}-\Theta_{12}\Theta_{22}^{-1}\Theta_{21} & 0 \\ 0 & \Theta_{22} \end{pmatrix}$$

por lo tanto, w y x_1 son independiente, esto es la Distribución Condicional W/X_2, es igual a la Distribución Marginal de w, así

$$W/X_2\ \Theta\ N_{qxp_1}(\mu_1-\mu_2\ \Theta_{22}^{-1}\Theta_{21}\ \ \Sigma\ \Theta-\Theta_{12}\Theta_{22}^{-1}\Theta_{21})$$

Como $w = x_1 - x_2\ \Theta_{22}^{-1}\Theta_{12}$ resulta que la Distribución Condicional $x_1/x_2 = w + x_2\Theta_{22}^{-1}\Theta_{12}/x_2$, por 4.28c (tomando $Q=I$, $C=I$) se obtiene finalmente:

$$X_1/X_2 \sim N_{qxp_1}(\mu_1 - \mu_2\Theta_{22}^{-1}\Theta_{21} + X_2\Theta_{22}^{-1}\Theta_{21}, \Sigma, \Theta_{11} - \Theta_{12}\Theta_{22}^{-1}\Theta_{21})$$

$$\sim N_{qxp_1}(\mu_1 + (X_2 - \mu_2)\Theta_{22}^{-1}\Theta_{21}, \Sigma, \Theta_{11} - \Theta_{12}\Theta_{22}^{-1}\Theta_{21})$$

un resultado análogo puede ser encontrado si la partición de $x \in \mathbb{R}^{qxp}$ está dada por $x = (x_1, x_2)$ donde $x \in \mathbb{R}^{q_1xp}$ (Arnold S.F. [5])

Teorema 4.1.11. Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^{pxn}$ M.A. reales. Entonces la distribución de $z = x_1 + ix_2$ ($i = \sqrt{-1}$) es llamada Distribución Normal-Compleja, denotada por N^c y definida por:

$$N^c(\mu M, \Sigma, \Theta) = \frac{1}{\pi^{PN}\,|\Sigma|^N\,|\Theta|^P}\, e^{-tr\Sigma^{-1}(Z-\mu M)\Theta^{-1}(\bar{\bar{Z}} - \bar{\mu M})'} \qquad 4.31$$

donde $\Sigma = \Sigma_1 + i\Sigma_2$ es una matriz hermitiana d.p. (i.e. $\bar{\bar{\Sigma}} = \Sigma$ ver Serge L. [65], pág. 282), $\mu = \mu_1 + i\mu_2$, $\bar{\mu} = \mu_1 + i\mu_2$.

La derivación[1] (prueba del teorema) de esta distribución puede ser vista en Wooding R.A' [75], Goodman N.R. [22], Krshnaiah P.R. [40]; mas aplicaciones[2] al análisis de varianza multivariado pueden ser vistas en Pillai C.S. y Jouris G.M. [58].

Para terminar esta sección se verá un teorema en el cual se define la Distribución Normal Singular.

[1,2] En dichos trabajos se presentan los resultados para el caso en que $X \in \mathbb{R}^{nx1}$. Las demostraciones de los dos teoremas anteriores presentados en el presente trabajo son análogos a los presentados al iniciar esta sección.

Teorema 4.1.12. Sea $X \in \mathbb{R}^{p\times r}$ con F.C. dada por 4.4. Sea Σ y Θ singulares, entonces la F.d. de X se llama Distribución Normal Singular, denotada por N^s, y está dada por:

$$N^s\ (\mu,\Sigma,\Theta) = \frac{1}{(2\Pi)^{pr}\left(\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{p}\lambda_i\ \lambda_j\right)^{\frac{1}{2}}}\ e^{-\frac{1}{2}tr\Sigma^{-}(X-\mu)\Theta^{-}(X-\mu)'} \qquad 4.32$$

donde λ_i, λ_j son las raices características no nulas de las matrices Σ, Θ y Σ^-, Θ^- son las inversas generalizadas de Σ, Θ.

Un estudio detallado[1] de esta distribución está dado en Sirivastava M.S. y Katri C.G. [71], Pérez G.L. [56],[57], así como algunas aplicaciones[2] en el análisis discriminante y otros temas del Análisis Multivariado están dadas en Rao C.R. [61], Pringle R.M. & Rayner A.A. [59].

4.2. Distribución Wishart.

En esta sección se estudiará la Distribución Wishart, la cual es el análogo y tiene una aplicación similar a la Distribución Ji cuadrada estudiada en la Teoría Estadística Univariada.

Como ya se mencionó en la introducción, la Distribución Wishart será derivada a partir de la Distribución Gama Multivariada $\Gamma_{qN}(p)$ - $p \in \mathbb{R}$, está dada por:

1, 2 En dichos trabajos se presentan los resultados para el caso en que $X \in \mathbb{R}^{nx}$. Las demostraciones de los dos teoremas anteriores presentados en el presente trabajo son análogas a las presentadas al iniciar esta sección.

$$\Gamma_{qN}(p) = \pi^{\frac{qN(qN-1)}{4}} \prod_{k=1}^{qN} \Gamma(p - \tfrac{1}{2}(k-1)) = \int_{G>0} e^{-tr\, G} \, |G|^{p-\frac{1}{2}(qN+1)} dG \qquad 4.33$$

Prueba: Consideremos la siguiente partición de .

$$G = G_{11} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{(1)} \\ g'_{(1)} & G_{22} \end{pmatrix} ; \quad G_{22} = \begin{pmatrix} g_{22} & g_{(2)} \\ g'_{(2)} & G_{33} \end{pmatrix} , \ldots , G_{qNqN} = (g_{qnqn}) \qquad 4.34$$

es claro que $\gamma = 1, 2, \ldots, qN-1$,

$$|G_{ii}| = \begin{vmatrix} g_{ii} & g_{(i)} \\ g'_{(i)} & G_{i+1,i+1} \end{vmatrix} = |g_{ii} - g_{(i)} G^{-1}_{i+1,i+1} g'_{(i)}| \, |G_{i+1},G_{i+1}| \qquad 4.35$$

$$= g_{ii.i+1,\ldots,qN} \, |G_{i+1,i+1}| \qquad 4.36$$

en donde $g_{ii.i+1,\ldots,qN} = |g_{ii} - g_{(i)} G^{-1}_{i+1,i+1} g'_{(i)}|$ 4.37

Del resultado anterior es fácil obtener las dos relaciones siguientes:

$$g_{ii.i+1,\ldots,qN} = \frac{|G_{ii}|}{|G_{i+1,i+1}|} \qquad 4.38$$

$$|G| = g_{qNqN} \prod_{k=1}^{qN-1} g_{kk.k+1,\ldots,qN} = g_{qNqN} \prod_{k=1}^{qN-1} \frac{|G_{kk}|}{|G_{k+1,k+1}|} \qquad 4.39$$

[1]Ahora bien, del hecho que

$$g_{qNqN}^{\frac{qN-1}{2}} \prod_{k=1}^{Nq-1} \frac{|G_{kk}|^{\frac{k-1}{2}}}{|G_{k+1,k+1}|^{\frac{1}{2}}} = 1 \qquad 4.40$$

resulta que se puede escribir:

$$|G|^{p-\frac{1}{2}(Nq+1)} = g_{qN,qN}^{p-\frac{1}{2}(Nq+1)+\frac{Nq+1}{2}} \prod_{k=1}^{Nq-1} \frac{|G_{kk}|^{p-\frac{1}{2}(Nq+1)+\frac{k-1}{2}}}{|G_{k+1,k+1}|^{p-\frac{1}{2}(Nq+1)+\frac{k}{2}}} \qquad 4.41$$

se obtiene de esta manera la siguiente expresión para $|G|^{p-\frac{Nq+1}{2}}$

$$|G|^{p-(Nq+1)\frac{1}{2}} = g_{qN,qN}^{p-1} \prod_{k=1}^{qN-1} \frac{[g_{kk} - g_{(k)} G_{k+1,k+1}^{-1} g'_{(k)}]^{p-\frac{1}{2}(qN-k)-1}}{|G_{k+1,k+1}|^{\frac{1}{2}}} \qquad 4.42$$

Del mismo modo, haciendo un desarrollo similar para trG, se obtiene:

$$trG = \sum_{k=1}^{qN-1} g_{kk} = g_{qN,qN} + \sum_{k=1}^{qN-1} [g_{kk} - g_{(k)} G_{k+1,k+1}^{-1} g'_{(k)}) +$$

$$g_{(k)} G_{k+1,k+1}^{-1} g'_{(k)} \qquad 4.43$$

$$= g_{qN,qN} + \sum_{k=1}^{qN-1} (g_{kk.k+1,\dots qN} + g_{(k)} G_{k+1,k+1}^{-1} g'_{(k)}) \qquad 4.44$$

Así de los resultados 4.42 y 4.44, 4.33 se puede escribir como:

---

1 Recuerde que:

$$\prod_{j=1}^{n-1} \frac{a_j^{j-1}}{a_{j+1}^{j}} = \frac{a_1^0}{a_2^1} \frac{a_2^1}{a_3^2} \cdot \frac{a_3^2}{a_4^3} \cdots\cdots \frac{a_{n-1}^{n-2}}{a_n^{n-1}} = \frac{1}{a_n^{n-1}}$$

$$\Gamma_{qN}(p) = \int_{G>0} g_{qN,qN}^{p-1}\, e^{-g_{qN,qN}} \prod_{k=2}^{qN-1} \left[\frac{(g_{k,k} - g_{(k)} G_{k+1,k+1}^{-1} g'_{(k)})^{p-\frac{1}{2}(Nq-1)-1}}{|G_{k+1,k+1}|^{\frac{1}{2}}} \right.$$

$$\left. e^{-[(g_{kk} - g_{(k)} G_{k+1,k+1}^{-1} g'_{(k)}) + g_{(k)} G_{k+1}^{-1} g'_{(k)}]} \right] \frac{(g_{11} - g_{(1)} G_{22}^{-1} g'_{(1)})^{p-\frac{1}{2}(Nq-1)-1}}{|G_{22}|^{\frac{1}{2}}}$$

$$e^{-[(g_{11} - g_{(1)} G_{22}^{-1} g'_{(1)}) + g_{(1)} G_{22}^{-1} g'_{(1)}]}\, ds_{11}\, dS_{22} \qquad 4.45$$

Haga la siguiente transformación:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{(1)} \\ g'_{(1)} & G_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I - g_{(1)} & G_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{(1)} \\ g'_{(1)} & G_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} - g_{(1)} G_{22}^{-1} g'_{(1)} & 0 \\ g'_{(1)} & g_{22} \end{pmatrix} \qquad 4.46$$

cuyo jacobiano es 1, luego, podemos escribir:

$$X = g_{11} - g_{(1)} G_{22}^{-1} g'_{(1)}\ ;\ V = g'_{(1)}\ ;\ W = S_{22} \qquad 4.47$$

Asi $\Gamma_{qN}(p)$ toma la forma:

$$\Gamma_{qN}(p) = \int_{W>0} W_{qNqN}^{p-1}\, e^{-W_{qN,qN}} \prod_{k=2}^{m-1} \frac{(W_{kk} - W_{(k)} W_{k+1,k+1}^{-1} W_{(k)})^{p-\frac{1}{2}(q_N-K)-1}}{|W_{k+1,k+1}|^{\frac{1}{2}}}$$

$$\left. e^{-[(W_{kk} - W_{(k)} W_{k+1}^{-1} W'_{(k)}) + W_{(k)} W_{k+1,k+1}^{-1} W'_{(k)}]} \right] \cdot \int_{X>0} x^{p-\frac{1}{2}(qN-1)-1} e^{-x}\, dx$$

$$\int_V \frac{1}{|W|^{\frac{1}{2}}}\, e^{-V'WV}\, dV dW \qquad 4.48$$

Ahora recuerde que $\int_{X>0} x^{p-\frac{1}{2}(Nq-1)-1} e^{-x} dx = \Gamma(p - \frac{1}{2}(Nq-1))$ y - $\frac{1}{|W|^{\frac{1}{2}}} \int_{V \in \mathbb{R}^{Nq-1}} e^{-V'WV} dV = \Pi\, \frac{Nq}{2}$, 4.48 se puede escribir como:

$$|J| = |\bar{T}^{-1}|^{qN+1} = \frac{1}{|E|^{\frac{qN+1}{2}}} \qquad 4.51$$

luego la f.d. de Y se puede escribir como:

$$f_Y(y) = |J| \quad f_X(\bar{T}^{-1}Y\bar{T}'^{-1}) \qquad 4.52$$

$$= \frac{1}{|E|^{\frac{qN+1}{2}}} \frac{|\bar{T}^{-1}E\bar{T}'^{-1}|^{p-\frac{1}{2}(1N+1)}}{\Gamma_{qN}(p)} \quad e^{-tr\bar{T}^{-1}Y\bar{T}'^{-1}} \qquad 4.53$$

reagrupando se obtiene:

$$f_Y(y) = \frac{|Y|^{p-\frac{1}{2}(qN+1)}}{\Gamma_{qN}(p)\,|E|^p} \qquad e^{-tr\ YE^{-1}} \qquad 4.54$$

Teorema 4.2.3. Si $Y \in \mathbb{R}^{qN,qN} \sim \Gamma_{qN}(p,E)$, entonces su f.c. está dada por:

$$\phi_X(T) = \frac{1}{|I - iET|^p} \qquad 4.55$$

en donde $T \in \mathbb{R}^{qNxqN}$ s.m.

Prueba:

$$\phi_Y(T) = E(e^{itrTY}) = \frac{1}{\Gamma_{qN}(p)\ |E|^p} \int_{Y>0} |Y|^{p-\frac{1}{2}(qN+1)} e^{-trE^{-1}Y} e^{itrTY} dY$$

$$= \frac{1}{\Gamma_{qN}(p)\ |E|^p} \int_{Y>0} |Y|^{p-\frac{1}{2}(qN+1)} e^{-tr(E^{-1}-iT)Y}\ dY \qquad 4.56$$

Existe[1] la matriz $\bar{S}$ d.p. $\ni$ $(E^{-1} - iT) = \bar{S}\bar{S}'$, así:

$$\phi_Y(T) = \frac{1}{\Gamma_{qN}(p)\ |E|^p} \int_{Y>0} |Y|^{p-\frac{1}{2}(qN+1)}\ e^{-tr\bar{S}'Y\bar{S}}\ dY \qquad 4.57$$

tomando $Q = S'YS$, cuyo J está dado por (Corolario 2.4.2.)

$$J = |\bar{S}^{-1}|^{qN+1} = \frac{1}{|E^{-1}-iT|^{\frac{1}{2}(qN+1)}} \qquad 4.58$$

de lo anterior 4.57, se puede escribir como:

$$\phi_Y(T) = \frac{|(E^{-1} - iT)^{-1}|^{p-\frac{1}{2}(1N+1)}}{|E|^p\ |E^{-1}-iT|^{\frac{1}{2}(qN+1)}\ \Gamma_{qN}(p)} \int_{Q>0} Q^{\ p-\frac{1}{2}(qN+1)}\ e^{trQ}dQ \qquad 4.59$$

$$= \frac{1}{|E|^p\ |E^{-1} - iT|^p} \qquad 4.60$$

$$= \frac{1}{|I - iET|^p} \qquad 4.61$$

Teorema 4.2.4. Sea $X \in \mathbb{R}^{q\times N}$ M.A., d.p. distribuida $N(0, I_q \otimes I_N)$ entonces la función de densidad de $\tilde{X}\tilde{X}'$, está definida por:

$$f_{\tilde{X}\ \tilde{X}'}(\tilde{x}\ \tilde{x}') = \frac{|\tilde{X}\tilde{X}'|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(qN+1)}}{2^{\frac{1}{2}qN}\ \Gamma_{qN}(\frac{1}{2})}\ e^{-\frac{1}{2}trxx'} \qquad 4.62$$

$$\tilde{X}\tilde{X}' \sim \Gamma(\tfrac{1}{2}, 2I_q \otimes I_N) \qquad 4.63$$

[1] Ver Graybill F.A. (25).

$$= \prod_{j=1}^{p} \frac{1}{|I - 2iT|^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{|I - 2iT|^{p/2}} \qquad 4.66$$

A la distribución encontrada en el corolario anterior, se le conoce como Distribución Wishart, la cual es un caso particular de la Distribución Wishart Generalizada, que se obtendrá en el siguiente corolario.

Corolario 4.2.1. Sea $V = \sum_{i=1}^{p} \tilde{X}_i\tilde{X}_i' \in \mathbb{R}^{qNxqN}$ s.m. d.p., en donde $\tilde{X}_i \sim N(O,\Sigma\otimes\Theta)$. Luego V es llamada Matriz Wishart y denotada por $V \sim W(qN,P,\Sigma\otimes\Theta)$[1]. Además su f.d. y f.c. se pueden escribir, respectivamente como:

$$f_V(v) = \frac{|V|^{(p-qN-1)\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}qNp}\,|\Sigma\otimes\Theta|^{\frac{1}{2}p}\,\Gamma_{qN}(p/2)}\, e^{-\frac{1}{2}tr(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}V} \qquad 4.67$$

$$\phi_V(T) = \frac{1}{|I - 2i(\Sigma\otimes\Theta)T|^{p/2}} \qquad 4.68$$

Prueba: Se encontrará primeramente su f.d. para lo cual se hará referencia al corolario anterior, asi:

Sea $K \in \mathbb{R}^{qNxqN} \ni \Sigma\otimes\Theta = \bar{K}\bar{K}'$ d.p. Además sea $W = \bar{K}\bar{V}\bar{K}'$ cuyo jacobiano es:

$$J = |\bar{K}^{-1}|^{qN+1} = \frac{1}{|\Sigma\otimes\Theta|^{(qN+1)/2}}$$

---

[1] Cabe hacer notar que p nos representa el número de grados de libertad

de tal forma que:

$$f_V(v) = |J| \quad f_W(W) = \frac{1}{|\Sigma \otimes \Theta|^{(qN+1)/2}} \; f_W(K^{-1}V\,K'^{-1}) \qquad 4.69$$

$$= \frac{|V|^{(p-qN-1)/2}}{2^{qNp/2}|\Sigma \otimes \Theta|^{p/2}\;\Gamma_m(p/2)} \; e^{-\frac{1}{2}trV(\Sigma \otimes \Theta)^{-1}} \qquad 4.70$$

Se procederá ahora a encontrar la f.c., considere la transformación anterior, luego:

$$\phi_V(T) = E(C^{itrTKWK'}) = \phi_V(K'\;T\;K)$$

$$= \frac{1}{|I - 2iK'TK|^{p/2}} = \frac{1}{|I - 2i(\Sigma \otimes \Theta)T|^{p/2}} \qquad 4.71$$

Del corolario anterior es fácil ver que cuando $N = 1$ la relación 4.67, nos representa la Distribución Wishart Centrada estudiada en Giri N.C. [21], Arnold S.F. [5], Kshirsagar A.M. [41] y otros.

A continuación se encontará la esperanza y varianza de la matriz V, para lo cual es necesario definir el siguiente producto.

Definición 4.2.2. Sea $A \in \mathbb{R}^{N \times M}$. Además considere la siguiente partición de A:

$$A = (A_1, A_2, \ldots, A_M) \qquad 4.72$$

Se define el producto $A \circledast A \in \mathbb{R}^{NM \times NM}$, como:

$$A \circledast A = (A_1 \otimes A,\; A_2 \otimes A,\; \ldots, A_M \otimes A) \qquad 4.73$$

donde $\otimes$ denota el producto Kronecker.

Teorema 4.2.5. Sea $V \varepsilon \mathbb{R}^{qNxqN}$ s.m. d.p.. $V \sim W(qN,p,\Sigma \otimes \Theta)$, entonces:

$$E(V) = P(\Sigma \otimes \Theta) \quad 4.74$$

$$Cov(V) = P(\Sigma \otimes \Theta \otimes \Sigma \otimes \Theta + \Sigma \otimes \Theta \circledast \Sigma \otimes \Theta) \quad 4.75$$

Prueba: La prueba consiste en encontrar la esperanza y covarianza (o varianza) entre dos elementos de la matriz v, para lo cual recuerde que:

$$V = \sum_{k=1}^{p} \tilde{X}_k \tilde{X}_k' \qquad \text{donde} \qquad \tilde{X}_k \sim N(\tilde{O},\Sigma \otimes \Theta)$$

$$V_{ij} = \sum_{k=1}^{p} X_{iTk}\, X_{pjk}$$

Además:

$$\varepsilon(X_{ij}) = \frac{\partial}{\partial t_{ij}} \phi_X(T)\Big|_{T=0} \qquad \varepsilon(X_{ij}X_{kj}X_{\ell m}) = \frac{\partial''' \phi_X(T)}{\partial t_{ij}\partial t_{ks}\partial t_{\ell m}}\Big|_{T=0}$$

$$\varepsilon(X_{ij}X_{ks}) = \frac{\partial^2 X(T)}{\partial t_{ij}\partial t_{ks}}\Big|_{T=0} \qquad \varepsilon(X_{ij},X_{ks},X_{\ell m},X_{\ell qn}) = \frac{\partial^{IV} \phi_X(T)}{\partial t_{ij}\partial t_{ks}\partial t_{\ell m}\partial_{qn}}\Big|_{T=0}$$

4.76

De las aclaraciones anteriores y del Teorema 4.1.4. es fácil - ver que:

$$E(X_{ij} - \mu_{ii}) = 0 \quad 4.77$$

$$\begin{aligned} E(X_{iJ} - \mu_{ij})(X_{ks} - \mu_{ks}) &= \sigma_{ik}\,\Theta_{js} \quad \text{para } i \neq k,\ j \neq s \\ &= \sigma_{ii}\,\Theta_{Jj} \quad \text{para } i \neq k,\ J = S \end{aligned} \quad 4.78$$

$$E(X_{ij}-\mu_{ij})(X_{ks}-\mu_{ks})(X_{\ell m}-\mu_{\ell m}) = 0 \qquad 4.79$$

$$E(X_{iJ}-\mu_{iJ})(X_{ks}-\mu_{ks})(X_{\ell m}-\mu_{m})(X_{qn}-\mu_{qn}) = \sigma_{ik}\Theta_{Js}\sigma_{\ell q}\Theta_{mn} +$$

$$+\ \sigma_{i\ell}\Theta_{Jm}\sigma_{kq}\Theta_{sn} + \sigma_{iq}\Theta_{Jn}\sigma_{k\ell}\Theta_{sm} \qquad 4.80$$

De este modo:

$$E(V_{ij}) = E\sum_{d=1}^{p} X_{iJd}X_{ksd} = \sum_{d=1}^{p} E(X_{iJd}X_{ksd}) = \sum_{d=1}^{p}\sigma_{ik}\Theta_{Js} = p\sigma_{ik}\Theta_{Js} \qquad 4.81$$

Dicho resultado es el t,r-ésimo elemento de la matriz $p\,\Sigma \otimes \Theta$; para encontrar la covarianza observe que:

$$E(V_{ij},V_{\ell m}) = \sum_{d,b=1}^{p} X_{iJd}X_{ksd}X_{\ell mb}X_{qnb} \qquad 4.82$$

$$= \sum_{d=1}^{p}(X_{ijd}X_{ksd}X_{\ell md}\,X_{qnd}) + \sum_{\substack{d,b=1\\ d\neq b}}^{p}(X_{iJd}X_{ksd}X_{\ell nb}X_{qnb}) \qquad 4.83$$

$$= p(\sigma_{ik}\Theta_{Js}\sigma_{\ell q}\Theta_{mn} + \sigma_{i\ell}\Theta_{jm}\sigma_{kq}\Theta_{sm} + \sigma_{iq}\Theta_{Jn}\sigma_{k\ell}\Theta_{sm}) + p(p-1)$$

$$(\sigma_{ik}\Theta_{Js} + \sigma_{ks}\Theta_{\ell m}) \qquad 4.84$$

Asi la covarianza entre v_{ij} $v_{\ell m}$ es:

$$E(V_{ij}-p\sigma_{ik}\Theta_{Js})(V_{\ell m}-p\sigma_{\ell q}\Theta_{mn}) = p(\sigma_{i\ell}\Theta_{Jm}\sigma_{kq}\Theta_{sm} + \sigma_{iq}\Theta_{Jn}\sigma_{k\ell}\Theta_{sm}) \qquad 4.85$$

cuando $i = \ell$ y $k = q$, obtenemos la varianza de v_{ik}

$$E(V_{ik} - p\sigma_{ik}\Theta_{Js}) = p(\sigma_{ik}\Theta_{Js}\sigma_{ik}\Theta_{Js} + \sigma_{ii}\Theta_{JJ}\sigma_{kk}\Theta_{ss}) \qquad 4.86$$

Para ver que el resultado anterior es el t,s-ésimo elemento de la matriz 4.75, es necesario verlo con un ejemplo[1].

Un resultado análogo al teorema anterior es encontrado en Haff R.L. [26], pero para cuando $N = 1$ en la Distribución Wishart. Además - no se propone una expresión para $\mathrm{Cov}(V)$

A continuación se encontrará la $E(|V|^t)$ la cual es denominada varianza generalizada, Anderson T.W. [3], Kshirsagar A.M. [44].

Algunos resultados análogos pueden ser vistos en Saw G.J. [63] y Shah B.K. [66].

Teorema 4.2.6. Sea $V \sim W(qN,p,\Sigma\otimes\Theta)$. Entonces la $E(|V|^t)$ está definida por:

$$E(|V|^t) = 2^{tqN} \, |\Sigma \otimes \Theta|^t \; \frac{\Gamma_{qN}(\frac{1}{2}p+t)}{\Gamma_{qN}(\frac{1}{2}\, p)} \qquad 4.87$$

Prueba:

$$E(|V|^t) = \int_{V>0} \frac{|V|^{(p-qN-1)/2\, +t}}{2^{\frac{1}{2}qNp} \, |\Sigma \otimes \Theta|^{\frac{1}{2}} \; \Gamma_{qN}(p/2)} \, e^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}V} \, dV > 0 \qquad 4.88$$

Sea $W = 2V$ cuyo jacobiano está dado por $J = 2^{\frac{1}{2}qN(qN+1)}$, luego:

$$E(|V|^t) = \frac{\Gamma_{qN}(\frac{1}{2}p+t) \; |\Sigma\otimes\Theta|^{\frac{1}{2}p+t} \; 2^{\frac{1}{2}p+t-(qN-1)/2}}{\Gamma_{qN}(\frac{1}{2}p) \; |\Sigma\otimes\Theta|^{\frac{1}{2}p} \; 2^{\frac{1}{2}qNp} \; 2^{\frac{1}{2}qN(qN+1)}} \int_{V>0} \Gamma_{qN}(\tfrac{1}{2}p+t,\; \Sigma \otimes \Theta) \; dv \qquad 4.89$$

$$= 2^{tqN} \, |\Sigma \otimes \Theta|^t \; \frac{\Gamma_{qN}(\frac{1}{2}p+t)}{\Gamma_{qN}(\frac{1}{2}\, p)}$$

---

[1] Lo cual se excluye de este trabajo por la laboriosidad que esto implica, sin embargo, esto se deja como un ejercicio al lector.

Teorema 4.2.7. Sean $V_j \sim W(qN, P_i, \Sigma \otimes \Theta)$, $i = 1,2,\ldots,r$, independientes, entonces $\sum_{j=1}^{r} V_j \sim W(qN, \sum_{j=1}^{r} P_i, \Sigma \otimes \Theta)$

Prueba:

$$\phi_{\sum_{j=1}^{r} V_i}(T) = E(e^{itr \sum_{i=1}^{r} V_j T_j}) = E(\prod_{j=1}^{r} e^{itr\, V_j T_j}) \qquad 4.90$$

$$\phi_{\sum_{j=1}^{r} V_i}(T) = \prod_{j=1}^{r} (e^{itr T_j V_j}) = \prod_{j=1}^{r} \left|I - 2i(\Sigma \otimes \Theta)T\right|^{-p/2} = \left|I - 2i(\Sigma \otimes \Theta)T\right|^{-\sum_{i=1}^{r} \frac{p}{2}}$$

En el siguiente teorema se puede observar que la Distribución Wishart centrada es invariante bajo transformaciones lineales.

Teorema 4.2.8. Sea $V \sim W(qN, p, \Sigma \otimes \Theta)$. Además sea $A \in \mathbb{R}_{qN \times qN}$ d.p. entonces la matriz $AVA' \sim W(qN, p, A\, \Sigma \otimes \Theta A)$

Prueba:

$$\phi_{AVA'}(T) = \varepsilon(e^{itrAVA'T}) = \varepsilon(e^{itrVA'TA}) = \phi_V(ATA') \qquad 4.91$$

$$= \frac{1}{\left|I - 2i(\Sigma\otimes\Theta)A'TA\right|^{p/2}} = \left|I - 2iA(\Sigma \otimes \Theta)A'T\right|^{-p/2}$$

Definición 4.2.3. Sea $X_i \in \mathbb{R}^{q \times N}$ M.A. d.p. $i = 1,2,\ldots p$. $V \sim N_{q \times N}(\mu, \Sigma, \Theta)$, entonces la matriz $V = (\sum_{i=1}^{p} \tilde{X}_i \tilde{X}_i') \sim W(qN, p, \Sigma \otimes \Theta, \Xi)$ llamada Distribución Wishart no central, donde a Ξ se le conoce como parámetro de no centralidad y está dado por $\Xi = \tilde{\mu}\, \tilde{\mu}'$

En el siguiente resultado se da a conocer la f.c. de la Distribución Wishart no central.

Teorema 4.2.9. Si $V \sim W(qN,p,\Sigma \otimes \Theta,\Xi)$, entonces su función característica está definida por:

$$\phi_V(T) = |I - 2i(\Sigma\otimes\Theta)T|^{-\frac{1}{2}p} \, e^{\mathrm{tr}\ it(I-2i(\ \otimes\ )T)^{-1}\Xi} \qquad 4.92$$

Prueba: Sea $\tilde{X}_j = \tilde{\mu}_j + C\tilde{Z}_j$, $\tilde{Z}_j \sim N(\tilde{O}, I_q\otimes I_N)$ y $CC' = \Sigma \otimes \Theta$ entonces:

$$\phi_V(T) = E(C^{itrTV}) = E(e^{itr\sum_{j=1}^{p} T_j\tilde{X}_j\tilde{X}_j'}) = \prod_{j=1}^{p} E(e^{itrT_i\tilde{X}_i\tilde{X}_i})$$

$$= \prod_{j=1}^{p} E(e^{i\tilde{Z}_j'C'T_jC\tilde{Z}_j + 2i\tilde{\mu}_jT_jCZ_j + i\tilde{\mu}_jT_j\tilde{\mu}_j}) \qquad 4.93$$

$$\phi_V(T) = \prod_{j=1}^{p} |I - 2iC'TC|^{-\frac{1}{2}} \, e^{i\tilde{\mu}_jT_j\mu_j - 2\mu_j'T_jC(I-2iC'T_jC)^{-1}C'T_j\tilde{\mu}_j}$$

$$= |I - 2i\Sigma\otimes\Theta\ T|^{-p/2} \, e^{\mathrm{tr}\ iT(I-2i\ \Sigma\otimes\Theta\ T)^{-1}\tilde{\mu}\tilde{\mu}'} \qquad 4.94$$

tomando $\Xi = \tilde{\mu}\tilde{\mu}'$ se obtiene el resultado deseado; es importante hacer notar que para el desarrollo de la demostración es necesario que $\Sigma \otimes \Theta$ sea d.p. y T s.m.,d.p.

Teorema 4.2.10. Sea $V_j \sim W(qN,p_j, \Sigma \otimes \Theta,\Xi_j)$, $j = 1,2,\ldots,t$, distribuidos independientes. Entonces:

$$\sum_{j=1}^{t} V_j \sim W(qN, \sum_{j=1}^{t} p_j, \Sigma \otimes \Theta, \sum_{j=1}^{t} \Xi_j) \qquad 4.95$$

Prueba:

$$\phi_{\sum_{j=1}^{t} V_j}(T) = \prod_{j=1}^{t} \varepsilon(e^{itrTV_j}) = \left|I - 2i\Sigma \otimes \Theta\, T\right|^{-\sum_{j=1}^{t} \frac{p_j}{2}} e^{triT(I-2i\,\Sigma\otimes\Theta\,T)^{-1} \sum_{j=1}^{t} \Xi}$$

En el resultado siguiente se encontrará la función de densidad de una M.A. $V \sim W(qN, p, \Sigma\otimes\Theta, \Xi)$, para lo cual es necesario utilizar algunos de los resultados presentados en las secciones 2.5, 2.6, 2.7, ya que dicha densidad queda en función de Polinomios Zonales.

Teorema 4.2.11. Sea $V \in \mathbb{R}^{qNxqN}$ s.m.d.p., teniendo como f.c. la relación 4.92; entonces su función de densidad se puede escribir como:

$$f_V(V) = \frac{|V|^{\frac{1}{2}(p-qN-1)}}{2^{\frac{1}{2}qNp}\Gamma_{qN}(\frac{1}{2}p)\,|\Sigma\otimes\Theta|^{\frac{1}{2}p}}\, e^{-\frac{1}{2}tr(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}V}\, e^{-\frac{1}{2}tr(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}\Xi}\, {}_0F_1\left(\tfrac{1}{2}p; \tfrac{1}{4}(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}\Xi(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}V\right) \qquad 4.96$$

$$f_V(V) = \frac{|V|^{\frac{1}{2}(p-qN-1)}}{2^{\frac{1}{2}qNp}\Gamma_{qN}(\frac{1}{2}p)\,|\Sigma\otimes\Theta|^{\frac{1}{2}p}}\, e^{-\frac{1}{2}tr(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}V}\, e^{-\frac{1}{2}tr(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}\Xi} \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{k} \frac{C_k(\frac{1}{2}(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}\Xi(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}V)}{(\frac{1}{2}p)_k\, h!} \qquad 4.97$$

$$f_V(V) = \frac{|V|^{\frac{1}{2}(p-qN-1)}}{2^{\frac{1}{2}qN}|\Sigma\otimes\Theta|^{\frac{1}{2}p}}\, e^{-\frac{1}{2}tr(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}V}\, e^{-\frac{1}{2}tr(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}\Xi}\, A_{\frac{1}{2}(p-qN-1)}\left(-\tfrac{1}{4}(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}\Xi(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}V\right) \qquad 4.98$$

[1]
$$f_V(V) = \frac{|V|^{\frac{1}{2}(p-qN-1)}}{2^{\frac{1}{2}qNp}\Gamma_{qN}(\frac{1}{2}p)\,|\Sigma\otimes\Theta|^{\frac{1}{2}p}}\, e^{-\frac{1}{2}tr(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}(Y+\Xi)}\, e^{qN} \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k} \frac{H_k(\frac{1}{2}Y^{\frac{1}{2}}(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}\tilde{\mu})}{h!\,(\frac{1}{2}p)^k} \qquad 4.99$$

---

[1] En esta expresión $H_k(M)$ son los polinomios de Hermite generalizados Herz C.S. [28] definidos por

$$H_k(M) = \Pi^{-\frac{1}{2}mn} e^{trMM'} \int_W e^{-tr(2iTW' - WW')}\, C_k(WW')\, dW$$

los cuales son un caso particular de los polinomios de Laguerre, relacionados por la siguiente expresión

$$H_k(M) = (-1)^k L_k^{(n-m-1)/2}(MM')$$

Ya que

$$ {}_0F_1^{1}(\tfrac{1}{2}n;MM') = e^{-m} \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{k} \frac{H_k(M)}{h!\,(\frac{1}{2}h)^k} \qquad 4.100 $$

$$ f_V^{1}(V) = \frac{|V|^{\frac{1}{2}(p-qN-1)}}{2^{\frac{1}{2}qNp}\,\Gamma_{qN}(\frac{1}{2}p)\,|\Sigma\otimes\Theta|^{\frac{1}{2}p}}\, e^{-\frac{1}{2}tr(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}(V+\Xi)+qN} \sum_{h=1} \sum_{k} \frac{L_k(\frac{1}{4}(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}\Xi(\Sigma\otimes\Theta)V)}{(-1)^{-k}} $$

4.101

Prueba: Partiremos de la f.c. y con ayuda de la transformada inversa de Fourier se encontrará su f.d., es decir:

$$ f_V(V) = \frac{2^{\frac{1}{2}qN(qN-1)}}{(2\ i)^{\frac{1}{2}qN(qN+1)}} \int_{R(T)>0} e^{-itrVT'}\ \phi_V(T)\ dT \qquad 4.102 $$

$$ = \frac{2^{\frac{1}{2}qN(qN-1)}}{(2\Pi_i)^{\frac{1}{2}qN(qN+1)}} \int_{R(T)>0} e^{-trVT'}\ |I-2i\Sigma\otimes\Theta\text{-}T|^{-p/2} e^{triT(I-2i\Sigma\otimes\Theta T)^{-1}\Xi} dT $$

4.103

Sea $X = \frac{1}{2i}(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}(I-T)$ cuyo $J = 2^{-\frac{1}{2}qNP}|\Sigma\otimes\Theta|^{-p/2}$, asi se puede escribir como:

$$ f_V(V) = \frac{e^{-\frac{1}{2}tr(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}\Xi}\, e^{-\frac{1}{2}tr(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}V}\, 2^{\frac{1}{2}qN(qN-1)}}{2^{-\frac{1}{2}qNp}|\Sigma\otimes\Theta|^{-p/2}\quad (2\Pi_i)^{\frac{1}{2}qN(qN+1)}} \int_{R(X)>0} |X|^{-p/2} e^{\frac{1}{2}trV(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}X} e^{\frac{1}{2}tr\Xi(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}X^{-1}} $$

4.104

Se evaluará ahora la integral, la cual se denota por Q, es decir:

$$ Q = \frac{2^{\frac{1}{2}qN(qN-1)}}{(2\Pi_i)^{\frac{1}{2}1N(qN+1)}} \int_{P(X)>0} |X|^{-p/2}\ e^{\frac{1}{2}trV(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}X}\ e^{\frac{1}{2}tr(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}X^{-1}\Xi} dX \qquad 4.105 $$

Primero tome en cuenta que $e^{\frac{1}{2}tr\Xi(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}X^{-1}} = {}_0F_0(\frac{1}{2}(\Sigma\otimes\Theta)\Xi\ X^{-1})$ por 2.49, utilizando 2.53 y las propiedades de Kummer, se obtiene:

---

1 Ver pie de página de la hoja anterior

$$Q = \frac{1}{\Gamma_{qN}(\frac{1}{2}p)} \; {}_0F_1(\tfrac{1}{2}p; \tfrac{1}{2}(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}\Xi(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}V) \, |V|^{-\frac{1}{2}(p-qN-1)} \qquad 4.106$$

Así se ha encontrado la expresión 4.96. Para el caso de 4.97, haga la expansión en Polinomios Zonales, del exponencial anterior, con la ayuda de 2.49, y por el Teorema 2.73 se obtiene el resultado buscado. Para encontrar la expresión 4.92 sólo tome en cuenta la relación 2.64 en 4.97. Las densidades 4.99 y 4.101 son obvias a partir de 4.100 y de la nota de pie.

A continuación se presentan dos teoremas, en el primero se encontrará los momentos de una matriz $V \sim W(qN,p,\Sigma\otimes\Theta,\Xi)$ y en el segundo resultado se presentan los momentos de la varianza generalizada.

Teorema 4.2.12. Sea $V \sim W(qM,p,\Sigma\otimes\Theta,\Xi)$. Entonces:

$$E(V) = p(\Sigma \otimes \Theta + \Xi) \qquad 4.107$$

$$V(V) = p(\Sigma \otimes \Theta \otimes \Sigma \otimes \Theta + (\Sigma \otimes \Theta) \circledast (\Sigma \otimes \Theta) + 4\tilde{\Xi}\tilde{\Xi}) \qquad 4.108$$

Prueba: La demostración es análoga a la dada en el Teorema 4.2.5

Teorema 4.2.13. El r-ésimo momento de la varianza generalizada $|V|^t$, se define por:

$$E(|V|^r) = \frac{\Gamma_{qN}(r + \frac{1}{2}p)}{\Gamma_{qN}(\frac{1}{2}p)\, 2^{\frac{1}{2}qNr}} \; |\Sigma\otimes\Theta|^r \; {}_1F_1(-r; \tfrac{1}{2}p; -\tfrac{1}{2}(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}\Xi) \qquad 1.109$$

Prueba: La demostración es inmediata, multiplicando 4.96 por $|V|^r$, y utilizando las expresiones 2.55, 2.59 y 2.60.

Este último resultado puede ser encontrado a partir de cualquiera de las representaciones de la Distribución Wishart no central (4.96

4.104) y subsecuentemente depender de cualquiera de las funciones que intervienen en dichas distribuciones (Polinomios Zonales, Laguerre, Hermite o Bessel).

Para concluir esta sección, se enunciará un teorema, el cual no se probará, ya que su demostración es igual a las presentadas en los teoremas 4.2.4 y 4.2.11, en los cuales se definen las Distribuciones Wishart Central y No-central complejas.

Teorema 4.2.14. Sean $V, X \in \mathbb{C}^{qN \times qN}$ M.A.d.p. S.M., tal que:

$$V = \sum_{j=1}^{p} \tilde{Z}_i \tilde{Z}_i' \quad \text{con} \quad \tilde{Z}_i \sim N^c(0, \Sigma \otimes \Theta) \text{ y } X = \sum_{j=1}^{p} \tilde{T}_i \tilde{T}_i' \quad \text{donde} \quad T_i \sim N(\tilde{\mu}\mu, \Sigma \otimes \Theta).$$

entonces las distribuciones de V y X son llamadas, respectivamente, Distribución Wishart Central y No central, y están definidas por:

$$\frac{|V|^{p-qN}}{\Gamma_{qN}(p)\,|\Sigma\otimes\Theta|^{p}}\, \mathcal{C}^{-tr(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}V} \qquad 4.110$$

y

$$\frac{|V|^{p-qN}}{\Gamma_{qN}(p)\,|\Sigma\otimes\Theta|^{p}}\, \mathcal{C}^{-tr(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}V}\, \mathcal{C}^{-tr(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}(\tilde{\mu}\mu)(\tilde{\mu}\mu)'}\, {}_0\tilde{F}_1(p, (\Sigma\otimes\Theta)^{-1}\tilde{\mu}\mu\tilde{\mu}\mu'(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}V) \qquad 4.111$$

Cabe mencionar que algunos trabajos sobre estas distribuciones, en el caso que N = 1, son presentados por Shaman P. [67], Krishnaiah P.R. [40], Khatri C.G. [39], Sirivastava M.S. [69]; Olkin J. [51], Goodman N.R. [22]; Anderson T.W. [1][2], Wooding R.A. [75].

4.3. Distribución T.

A continuación se obtendrá la distribución de la M.A. $s = (pV^{-1})^{\frac{1}{2}}$ $x + \mu$, donde $V = V^{\frac{1}{2}}V^{\frac{1}{2}}$, tiene una Distribución Wishart, y x una Distribución Normal, siendo x y V independientes. La distribución de dicha M.A. es llamada Distribución T-Multivariada la cual es una generalización de la Distribución de una v.a. t-Student.

Teorema 4.3.1. Si $V \sim W(qN,p,\Sigma\otimes\Theta)$ y $X \sim N_{qNxqN}(O,I_{qN},I_{qN})$ siendo independientes, entonces $S \in \mathbb{R}^{qNxqN}$, $S = \sqrt{p}\, V^{-\frac{1}{2}}X+\mu$; tiene una Distribución T-Multivariada, denotada por $T(qN,\mu,\Sigma\otimes\Theta,p)$

$$f(S) = \frac{\Gamma_{qN}[\frac{1}{2}(p+qN)]\ |\Sigma\otimes\Theta|^{-\frac{1}{2}p}}{p\pi^{\frac{1}{2}qN}\Gamma_{qN}(\frac{1}{2}p)\,p^{\frac{1}{2}qN}} \left| (\Sigma\otimes\Theta)^{-1} + \frac{(S-\mu)'(S-\mu)}{p} \right|^{-\frac{1}{2}[p+qN]} \qquad 4.112$$

donde $\mu \in \mathbb{R}^{qNxqN}$, y p son los grados de libertad.

Prueba: La distribución conjunta de V y X, es:

$$f(V,X) = \frac{|V|^{\frac{1}{2}(p-qN-1)}\, e^{-tr(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}V}\, e^{-trXX'}}{\Gamma_{qN}(\frac{1}{2}p)\quad \Pi^{\frac{1}{2}qN}\quad |\Sigma\otimes\Theta|^{\frac{1}{2}p}} \qquad 4.113$$

Luego la distribución conjunta de S y V, (tomando en cuenta que $J = p^{-\frac{1}{2}(qN)^2}|V|^{qN/2}$), se define como:

$$f(S,V) = \frac{|V|^{\frac{1}{2}(p-1)}\, e^{-tr[(\Sigma\otimes\Theta)^{-1} + \frac{1}{p}(X-\mu)(X-\mu)']V}}{(\Pi)^{\frac{1}{2}qN}\quad \phi^{\frac{1}{2}(qN)}\quad \Gamma_{qN}[\frac{1}{2}p]\quad |\Sigma\otimes\Theta|^{\frac{1}{2}p}} \qquad 4.114$$

Integrando con respecto a V se obtiene 4.112 (para lo cual haga referencia a 4.54 o 2.47)

Corolario 4.3.1. Si en el teorema anterior $x \sim N_{qNxqN}(0, \Sigma\otimes\Theta, I_{qN})$, y sin modificar las otras hipótesis, entonces $s \sim T(qN,\mu, I_q \otimes I_N, p)$

Prueba: La distribución de x y v se puede escribir como:

$$f(v,x) = \frac{|v|^{\frac{1}{2}(p-1N-1)} \; e^{-tr(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}v} e^{-tr(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}x'x}}{\Gamma_{qN}(\frac{1}{2}p) \quad \Pi^{\frac{1}{2}qN} \quad |\Sigma\otimes\Theta|^{\frac{1}{2}p} \quad |\Sigma \otimes \Theta|^{\frac{1}{2}qN}} \qquad 4.115$$

Haciendo la transformación $s = p^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}}x - \mu$ cuyo $J = p^{-\frac{1}{2}qN} \, |v|^{\frac{1}{2}qN}$ se obtiene:

$$f_{s,v}) = \frac{|v|^{\frac{1}{2}(p-1)} \; e^{-tr[(\Sigma\otimes\Theta)^{-1} + \frac{1}{p}(s-\mu)(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}(s-\mu)']v}}{\Gamma_{qN}(\frac{1}{2}p) \quad \Pi^{\frac{1}{2}qN} |\Sigma \otimes \Theta|^{\frac{1}{2}(p+qN)} \quad p^{\frac{1}{2}(qN)^2}} \qquad 4.116$$

integrando con respecto a v, como en el teorema anterior y reacomodando términos obtenemos el resultado deseado. Es importante recordar que la matriz $\Sigma \otimes \Theta$ es D.P. y S.M.

Corolario 4.3.2. Es fácil ver que si en el corolario anterior $x \sim N_{qNxqN}(0, I_{qN}, (\Sigma\otimes\Theta)]$, s también se distribuye $T(qN,\mu,I_q\otimes I_N,p)$.

Corolario 4.3.3. Sean $x \sim N_{qNxqN}(0,\Sigma_1\otimes\Theta_1, I_{qN})$ o $x \sim N_{qNxqN}(0, I_{qN}, \Sigma_1\otimes\Theta_1)$ y $v \sim W(qN,p,\Sigma_2\otimes\Theta_2)$ s.m.d.p. entonces la f.d. de la matriz - $s = p^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}}x + \mu$ se puede escribir como:

$$f(s) = \frac{\Gamma_{qN}[\frac{1}{2}(p+qN)] \; \left|(\Sigma_2\otimes\Theta_2)^{-1} + \frac{1}{p}(s-\mu)'(\Sigma_1\otimes\Theta_1)^{-1}(s-\mu)\right|^{-\frac{1}{2}(p+qN)}}{p^{\frac{1}{2}(qN)} \quad (\Pi)^{\frac{1}{2}qN} \quad \Gamma_{qN}(\frac{1}{2}p) \quad |\Sigma_1\otimes\Theta_1|^{\frac{1}{2}qN} \quad |\Sigma_2\otimes\Theta_2|^{\frac{1}{2}p}} \qquad 4.117$$

Prueba: La demostración se sigue el Teorema 4.3.1.

Corolario 4.3.4. Sean $\tilde{x} \sim N_{qN}(\tilde{O},\Sigma \otimes \Theta)$ y $V \sim W(qN,p+n-1,\Sigma\otimes\Theta)$ entonces $\tilde{S} = p^{\frac{1}{2}}V^{-\frac{1}{2}}\tilde{x} + \tilde{\mu} \sim T_{qN}(\tilde{\mu},\Sigma \otimes \Theta, p)$

Prueba: La distribución conjunta de $\tilde{x}$ y V está definida por:

$$f(\tilde{x},V) = \frac{|V|^{\frac{1}{2}(p-1)}\, e^{-tr(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}V}\, e^{-tr\tilde{x}(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}\tilde{x}'}}{\Gamma_{qN}[\frac{1}{2}(p+qN-1)]\,|\Sigma \otimes \Theta|^{\frac{1}{2}(p+qN-1)}\,\Pi^{\frac{1}{2}qN}|\Sigma \otimes \Theta|^{\frac{1}{2}}} \qquad 4.118$$

Haciendo la transformación $\tilde{x} = p^{-\frac{1}{2}}V^{\frac{1}{2}}(\tilde{S} - \tilde{\mu})$ cuyo $J = P^{-\frac{1}{2}qN}|V|^{\frac{1}{2}}$ se obtiene:

$$f(\tilde{S},V) = \frac{|V|^{\frac{1}{2}(p-1)}\, e^{-tr[(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}+\frac{}{p}(\tilde{S}-\tilde{\mu})(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}(\tilde{S}-\tilde{\mu})']V}}{\Gamma_{qN}[\frac{1}{2}(p+qN-1)\quad |\Sigma \otimes \Theta|^{\frac{1}{2}(p+qN)}\quad (\Pi p)^{\frac{1}{2}qN}} \qquad 4.119$$

Integrando con respecto a V se obtiene:

$$f(\tilde{S}) = \frac{\Gamma_{qN}[\frac{1}{2}(p+qN)]|(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}+\frac{1}{p}(\tilde{S}-\tilde{\mu})(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}(\tilde{S}-\tilde{\mu})'|^{\frac{1}{2}(p+q)}}{(\Pi P)^{\frac{1}{2}qN}\,\Gamma_{qN}[;(p+qN-1)]\quad|\Sigma\otimes\Theta|^{\frac{1}{2}(p+qN)}} \int_{V>0} \Gamma(\tfrac{1}{2}(p+qN),(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}+$$

$$+\frac{1}{p}(\tilde{S}-\tilde{\mu})(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}(\tilde{S}-\tilde{\mu})]dV$$

Por 4.33 y 4.50 se tiene finalmente:

$$f(\tilde{S}) = \frac{\Gamma[\frac{1}{2}(p+qN)]}{\Gamma(\frac{1}{2}p)(\Pi p)^{\frac{1}{2}qN}}\{1+\frac{1}{p}(\tilde{S}-\tilde{\mu})'(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}(\tilde{S}-\tilde{\mu})\}^{\frac{1}{2}(p+q)} \qquad 4.120$$

Teorema 4.3.2. Sean $X, V \in \mathbb{R}^{qNxqN}$, tales que $X \sim N_{qNxqN}(0,I_{qN}, I_{qN})$ y $V \sim W(qN,p,\Sigma\otimes\Theta,\Xi)$ entonces la M.A. $S = p^{\frac{1}{2}}V^{-\frac{1}{2}}X+\mu$ tiene la siguiente f.d.

$$f(S) = \frac{\Gamma_{qN}[\frac{1}{2}(p+qN)]\ e^{-tr(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}\Xi}}{\Gamma_{qN}[\frac{1}{2}p]\,\Pi^{\frac{1}{2}qN}\,p^{\frac{1}{2}(qN)^2}|\Sigma\otimes\Theta|^{\frac{1}{2}p}}|(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}+\frac{1}{p}(S-\mu)(S-\mu)'|^{\frac{1}{2}(p+qN)} \qquad 4.121$$

$${}_1F_1\{\tfrac{1}{2}p,\tfrac{1}{2}(p+qN),-\tfrac{1}{4}[(\Sigma\otimes\Theta)^{-2}\tfrac{1}{4}\tfrac{1}{p}(S-\mu)(S-\mu)']^{-1}(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}\Xi(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}\}$$

Prueba: La prueba se sigue del Teorema 4.3.1, solo note que al integrar con respecto a v, tome en cuenta la expresión 2.54

En el siguiente resultado se define la media y la varianza de la M.A. s.

Teorema 4.3.3. Si $s \sim T(qN, \mu, \Sigma\otimes\Theta, p)$ entonces:

$$E(S) = \mu \qquad \text{si} \quad p > 1 \tag{4.122}$$

$$Cov(S) = \frac{p}{p-2}\,(\Sigma\otimes\Theta \otimes \Sigma\otimes\Theta + \Sigma \otimes \Theta \otimes \Sigma \otimes \Theta)^{-\frac{1}{2}}(\Sigma \otimes\Theta \otimes I_q \otimes I_N) \quad \text{si } p>2 \tag{4.123}$$

Prueba: Ya que x y v son M.A. independientes

$$E(S) = E(p^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}})E(X) + E(\mu) = \mu$$

recordando que $E(X) = 0$.

En forma similar es encontrada la covarianza de la M.A. s. Recuerde (de la teoría de las distribuciones) que cuando la Distribución t-Students tiene un grado de libertad ($p = 1$), la función obtenida es - la Distribución de Cauchy. Asi, en el caso de una M.A. s, distribuida T-multivariada, con $p = 1$, se obtiene la Distribución de Cauchy Multivariada, Press S.J. [60]. Formalizando lo enunciado anteriormente, surge la siguiente definición.

Definición 4.3.1. Sea $s \sim T(qN, \mu, \Sigma\otimes\Theta, p)$, entonces, si $p = 1$, $s \in \mathbb{R}^{qNxqN}$d.p. tiene una Distribución de Cauchy multivariada, la cual es denotada por $C(qN, \mu, \Sigma\otimes\Theta)$ y se define como

$$f(S) = \frac{\Gamma_{qN}[\frac{1}{2}(qN+1)]\,|\Sigma\otimes\Theta|^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma_{qN}[\frac{1}{2}p]\quad \Pi^{\frac{1}{2}qN}}\,[(\Sigma\otimes\Theta)^{-1} + (S-\mu)'(s-\mu)]^{-\frac{1}{2}(qN+1)} \tag{4.124}$$

Se encontrará a continuación la distribución de la M.A. $s=\sqrt{p}\, v^{-\frac{1}{2}}x$, donde $v-v^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}} \sim W(qN,p,\Sigma\otimes\Theta)$ y $x \sim N_{q\,NqN}(\mu,\Sigma\otimes\Theta,I_{qN})$, la cual llamaremos - Distribución T-multivariada no-central, Kshirsagar A.M.[42].

Teorema 4.3.4. Si $v \sim W(qN,p,\Sigma\otimes\Theta)$ y $x \sim N_{qNxqN}(\mu,\Sigma\otimes\Theta,I_{qN})$ entonces la matriz $s = p^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}x + \rho \sim T(qN,\rho,\Sigma\otimes\Theta,p,\Xi)$ donde $\Xi = \mu\mu \ \varepsilon\ \mathbb{R}^{qNxqN}$, - denominada Distribución T-multivariada no central y definida por:

$$f(s) = \frac{e^{-tr(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}} \left|(\Sigma\otimes\Theta)^{-1} + \frac{1}{p}(s-\rho)'(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}(s-\rho)\right|^{-\frac{1}{2}(p+qN)}}{p^{\frac{1}{2}(qN)^2}\Gamma_{qN}(\frac{1}{2}p)\ \Pi^{\frac{1}{2}qN}\ |\Sigma\otimes\Theta|^{\frac{1}{2}p+qN}} \sum_{h=}^{\infty}\sum_{k} \frac{[\frac{1}{2}(p+qN),k]}{h!}$$

$$\cdot\ C_k'\{[(\Sigma\otimes\Theta)^{-1} + \frac{1}{p}(s-\rho)(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}(s-\rho)]^{-1},\ -\frac{2}{p^{\frac{1}{2}}}(s-\rho)(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}\mu\} \qquad 4.125$$

Prueba: La Distribución Conjunta de v y x se puede escribir como:

$$f(v,x) = \frac{v^{\frac{1}{2}(p-qN)}\, e^{-tr(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}v}\, e^{-tr(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}(x-\mu)'(x-\mu)}}{\Gamma_{qN}(\frac{1}{2}p)\qquad \Pi^{\frac{1}{4}qN}\qquad |\Sigma\otimes\Theta|^{\frac{1}{2}(p+qN)}} \qquad 4.126$$

Tomando $s = p^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}}x+\rho$ cuyo jacobiano $J = p^{-\frac{1}{2}(qN)}|v|^{\frac{1}{2}qN}$, la - Distribución Conjunta de s y v se define como:

$$f(s,v) = \frac{v^{\frac{1}{2}(p-1)}\, e^{-tr(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}}\, e^{-tr[(\Sigma\otimes\Theta)^{-1} + \frac{1}{p}(s-\rho)(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}(s-\rho)]v}}{\Gamma_{qN}(\frac{1}{2}p)\ \Pi^{\frac{1}{2}qN}\ |\Sigma\otimes\Theta|^{\frac{1}{2}(p+qN)}}\, e^{-tr\frac{2}{p^{\frac{1}{2}}}(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}s\mu v^{\frac{1}{2}}} \qquad 4.127$$

La expresión 4.125 puede ser obtenida por dos caminos diferentes a partir de la ecuación anterior.

a) En 4.127 expandiendo $e^{-tr\frac{2}{p^{\frac{1}{2}}}(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}s\mu v^{\frac{1}{2}}}$ en Polinomios Zonales e integrando con respecto a v, con la ayuda de 2.47 se obtiene el resultado buscado.

b) En la misma ecuación 4.121 expandiendo $|V|^{\frac{1}{2}(p-1)}$ en Polinomios Zonales e integrando con respecto a V, utilizando la ecuación

$$\int_{T>O} e^{-tr3S'T} e^{-tr\, TZT'}\, p(T)dT = |Z|^{-V-\frac{k}{2}}\, e^{-tr\Pi SZ^{-1}}\, p(-S) \qquad 4.128$$

[Herz C.S. [28] pag. 492], donde $P(T)$ es un polinomio de grado V, se obtiene la expresión buscada.

Algunos otros trabajos en los cuales se ven las aplicaciones de esta distribución, asi como algunas caracterizaciones de la misma, son presentados por Kshirsagar A.M. [42], Dickey J.M. [15], Press J.S. [60], Lin P.E. [46], Geisser S. [20], Dunnett C.W. and Sobel M. [17], Dunn O.J. [16], Tiao G.C. [72] y Miller K.S. [47].

4.4. Distribución F.

En la presenta sección, se generalizan las Distribuciones F y Beta univariadas, al caso multivariado. Ambas distribuciones juegan un papel muy importante, en varios problemas del análisis multivariado como son: las pruebas de hipótesis, Sirivastava M.J. [70] y pruebas de normalidad multivariadas, Wagle B. [74], entre otros.

Definición 4.4.1. Sean $V_1, V_2 \in \mathbb{R}^{qNxqN}$, tales que $V_i \sim W[qN, \rho_i, (\Sigma\otimes\Theta)_i]_{i=1,2}$, independientes. Se definen las M.A. F y B como:

$$F = V_1^{-\frac{1}{2}} V_2\, V_1^{-\frac{1}{2}} \qquad 4.131$$

$$B = (V_1 + V_2)^{-\frac{1}{2}} V_2 (V_1 + V_2)^{-\frac{1}{2}} \qquad 4.132$$

respectivamente, siendo F d.p., y $0 \leq B \leq I$

A continuación se exponen dos teoremas en los cuales se encuentran las distribuciones de F y B.

Teorema 4.4.1. Sea $F \in \mathbb{R}^{qNxqN}$ M.A., definida por 4.131, entonces su función de densidad se define por:

$$f_{(F)} = \frac{|\Sigma\otimes\Theta|_1^{\frac{1}{2}p_1} \; |\Sigma\otimes\Theta|_2^{\frac{1}{2}p_2}}{B_{qN}(\frac{1}{2}p_1, \frac{1}{2}p_2)} |F|^{\frac{1}{2}(p_2-qN-1)} |(\Sigma\otimes\Theta)^{-1} - (\Sigma\otimes\Theta)_2 F|^{-\frac{1}{2}(p_1+p_2)} \qquad 4.133$$

$$B_{qN}(a,b) = \frac{\Gamma_{qN}(a)\Gamma_{qN}(b)}{\Gamma_{qN}(a,b)} = \text{Función Beta Multivariada}$$

Herz C.S. [28].

Prueba: Antes de empezar la prueba recuerde que $(\Sigma\otimes\Theta)_i$, V_i, - $i=1,2$, son matrices s.m., d.p.

La f.d. conjunta de V_1 y V_2 se define por:

$$f_{(V_1,V_2)} = \prod_{i=1}^{2} \frac{|V_i|^{\frac{1}{2}(p_i-qN+1)} e^{-\frac{1}{2}tr(\Sigma\otimes\Theta)_i^{-1}V_i}}{2^{qNpi} \quad \Gamma(\frac{1}{2}p_i) \; |\Sigma\otimes\Theta|_i^{\frac{1}{2}p_i}} \qquad 4.134$$

Tomando $F = V_1^{\frac{1}{2}}V_2 = V_1^{\frac{1}{2}}$ cuyo $J = |V|^{\frac{1}{2}(qN+1)}$ - e, integrando con respecto a V_1, se tiene:

$$f_{(F)} = \frac{|F|^{\frac{1}{2}(p_1-qN-1)} \Gamma_{qN}(\frac{1}{2}\;(p_1+p_2))|(\Sigma\otimes\Theta)_1^{-1}+(\Sigma\otimes\Theta)_2^{-1}F|^{-\frac{1}{2}(p_1+p_2)}}{\Gamma_{qN}(\frac{1}{2}p_1)\;\Gamma_{qN}(\frac{1}{2}p_2)\;|\Sigma\otimes\Theta|^{\frac{1}{2}p_1} \quad |\Sigma\otimes\Theta|^{\frac{1}{2}p_2}} \int_{V>0} W[qN, \tfrac{1}{2}(p_1+p_2), (\Sigma\otimes\Theta)_1^{-1}+(\Sigma\otimes\Theta)_2^{-2}F]\, dV \qquad 4.135$$

Corolario 4.4.1. Si en el teorema anterior $V_i \sim W(qN, p_i, I_q \otimes I_N)$, la f.d. de F se puede escribir como:

$$f_{(F)} = \frac{1}{B_{qN}(\frac{1}{2}p_1, \frac{1}{2}p_2)} |F|^{\frac{1}{2}(p_2-qN-1)} |I+F|^{-\frac{1}{2}(p_2+p_1)} \tag{4.136}$$

Teorema 4.4.2. Sea $B \in \mathbb{R}^{qN\times qN}$ M.A., definida por 4.132, entonces su f.d. se define como (aqui $(\Sigma\otimes\Theta)_1 = (\Sigma\otimes\Theta)_2$):

$$f_{(B)} = \frac{1}{B_{qN}(\frac{1}{2}p_1, \frac{1}{2}p_2)} |B|^{\frac{1}{2}(p_2-qN-1)} |I-B|^{\frac{1}{2}(p_1-qN-1)} \tag{4.137}$$

Prueba: Nuevamente no pierda de vista que: $(\Sigma\otimes\Theta)_i, V_i$ son s.m. la f.d. conjunta de V_1 y V_2 está dada por 4.134. Luego:

Sea $S = V_1 + V_2$ y $V_2 = V_2$, claramente $J = I$, así:

$$f_{(V,S)} = \frac{|\Sigma\otimes\Theta|^{-\frac{1}{2}(p_1+p_2)} |S-V_2|^{\frac{1}{2}(p_1-qN-1)} |V|^{\frac{1}{2}(p_2-qN-1)}}{\Gamma_{qN}(\frac{1}{2}p_1)\ \Gamma_{qN}(\frac{1}{2}p_2)\ 2^{\frac{1}{2}qN(p_1+p_2)}} e^{-tr(\Sigma\otimes\Theta)^{-1}S} \tag{4.138}$$

Tomando $B = S^{-\frac{1}{2}}V_2S^{-\frac{1}{2}'}$, donde, $S^{-\frac{1}{2}}S^{-\frac{1}{2}'} = S$. $f_{(B)}$ se puede escribir como (note que $J = |S|^{\frac{1}{2}(p+1)}$

$$f_{(B)} = \frac{|\Sigma\otimes\Theta|^{-\frac{1}{2}(p_1+p_2)+\frac{1}{2}(p_1+p_2)}\Gamma(\frac{1}{2}(p_1+p_2)\ |B|^{\frac{1}{2}(p_2-qN-1)} |I-B|^{\frac{1}{2}(p_1-qN-1)}}{\Gamma_{qN}(\frac{1}{2}p_1)\ \Gamma_{qN}(\frac{1}{2}p_2)} \cdot$$

$$\cdot \int_{S>0} W(qN, \tfrac{1}{2}(p_1+p_2), \Sigma\otimes\Theta)\,dS \tag{4.139}$$

En el siguiente resultado se encontrará la Función Característica.

Teorema 4.4.3. Sea $B \in \mathbb{R}^{qN\times qN}$ d.p. Teniendo a 4.137 como f.d. Entonces:

$$\phi_B(T) = E(e^{itrTB}) = {}_1F_1(\tfrac{1}{2}p_2;\tfrac{1}{2}(p_2+p_1);T) \qquad 4.140$$

Prueba: Multiplicando 4.137 por $e^{itrT'B}$ y con ayuda de 2.55 se obtiene el resultado buscado.

El siguiente resultado es muy importante dentro de la teoría de la Prueba de Hipótesis. Troskie C.G. [73], Lawley D.N. [45].

Teorema 4.4.4. Si $B \in \mathbb{R}^{qN\times qN}$, tiene a 4.137 como f.d. el t-ésimo momento de $|B|^t$ se define por:

$$E(|B|^t) = \frac{B_{qN}(\tfrac{1}{2}p_2+t,\tfrac{1}{2}p_1)}{B_{qN}(\tfrac{1}{2}p_1;\tfrac{1}{2}p_2)} \qquad 4.141$$

Prueba:

$$E(|B|^t) = \frac{1}{B_{qN}(\tfrac{1}{2}p_1,\tfrac{1}{2}p_2)} \int_{O\leq B\leq I} |B|^{\frac{1}{2}(p_2+2t-qN-1)} |I-B|^{\frac{1}{2}(p_1-qN-1)} dB \qquad 4.142$$

$$= \frac{B_{qN}(\tfrac{1}{2}p_2+t,\tfrac{1}{2}p_1)}{B_{qN}(\tfrac{1}{2}p_1,\tfrac{1}{2}p_2)} \int_{O\leq B\leq I} \frac{|B|^{\frac{1}{2}(p_2+2t-qN-1)}}{B_{qN}(\tfrac{1}{2}p_2+t;\tfrac{1}{2}p_1)} |I-B|^{\frac{1}{2}(p_1-qN-1)} dB \qquad 4.143$$

Teorema 4.4.3. Sea $B \in \mathbb{R}^{qN\times qN}$ d.p.s.m., tal que su f.d. está dada por 4.137. Entonces:

$$E(B^t) = \sum_k \frac{(\tfrac{1}{2}p)_k}{[\tfrac{1}{2}(p_1+p_2)]_k} C_k(I_{qN}) \qquad 4.144$$

Prueba: Para ver esto, se utilizará la f.c., definida por

$$\phi_B(T) = {}_1F_1(\tfrac{1}{2}p_2,\tfrac{1}{2}(p_2+p_1);T) \qquad 4.145$$

por 2.36:

$$= \sum_{h=0}^{\infty} \sum_k \frac{(\tfrac{1}{2}p_2)_k}{[\tfrac{1}{2}(p_1+p_2)]_k} \frac{C_k(T)}{h!} \qquad 4.146$$

De acuerdo a 2.43 y 2.44:

$$E(B^h) = \sum_k \frac{(\frac{1}{2}p_2)_k}{[\frac{1}{2}(p_1+p_2)]_k} C_k(I_{qN}) \qquad 4.147$$

A continuación se encontrarán las f.d. de las M.A. F y V, cuando en la definición 4.4.1, $V_2 \sim W(qN,p_2,(\Sigma\otimes\Theta)_2,\Xi)$

Teorema 4.4.5. Sea $V_1,V_2 \in \mathbb{R}^{qN\times qN}$, s.m.d.p. tales que $V_1 \sim W(qN, p_1,(\Sigma\otimes\Theta)_1)$ y $V_2 \sim W(qN,p_2,(\Sigma\otimes\Theta)_2,\Xi)$. Sea además $F = V_1^{-\frac{1}{2}} V V_2^{-\frac{1}{2}}$, entonces - - $f_{(F)}$ se define por:

$$f_{(F)} = \frac{e^{-\frac{1}{2}(\Sigma\otimes\Theta)_2^{-1}\Xi} |F|^{\frac{1}{2}(p_2-qN-1)} |(\Sigma\otimes\Theta)_1^{-1} + (\Sigma\otimes\Theta)_2^{-1}F|^{-\frac{1}{2}(p_1+p_2)}}{B_{qN}(\frac{1}{2}p_1,\frac{1}{2}p_2)\, |\Sigma\otimes\Theta|_1^{\frac{1}{2}p_1} |\Sigma\otimes\Theta|_2^{\frac{1}{2}p_2}}$$

$$ {}_1F_1\{\tfrac{1}{2}p_2; \tfrac{1}{2}(p_1+p_2); \tfrac{1}{4}(\Sigma\otimes\Theta)_2^{-1}\Xi(\Sigma\otimes\Theta)_2^{-1}F[(\Sigma\otimes\Theta)_1^{-1}+(\Sigma\otimes\Theta)_2^{-1}F]^{-1}\} \qquad 4.148$$

la cual es llamada Distribución F-Multivariada No-central.

Prueba: La f.d. de V_1 y V_2 está dada por:

$$f_{(V_1V_2)} = \prod_{i=1}^{2} \frac{|V_i|^{\frac{1}{2}(p_i-qN-1)} e^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\Sigma\otimes\Theta)_i^{-1}V_i} e^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\Sigma\otimes\Theta)_2^{-1}\Xi}}{2^{qNp_i}\, \Gamma_{qN}(\frac{1}{2}p_i)\, |\Sigma\otimes\Theta|_i^{\frac{1}{2}p_i}} {}_0F_1(\tfrac{1}{2}p_2; \tfrac{1}{4}(\Sigma\otimes\Theta)_2^{-1}\Xi(\Sigma\otimes\Theta)_2^{-2}V_2) \qquad 4.149$$

Sea $F = V_1^{-\frac{1}{2}}V_2V_1^{-\frac{1}{2}}$, cuyo $J = |V|^{\frac{1}{2}(qN+1)}$ e integrando con respecto a V_1, se tiene:

$$= \frac{|F|^{\frac{1}{2}(p_2-qN-1)} e^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\Sigma\otimes\Theta)_2^{-1}\Xi}}{\Gamma_{qN}(\frac{1}{2}p_1)\Gamma_{qN}(\frac{1}{2}p_2)\, |\Sigma\otimes\Theta|_1^{\frac{1}{2}p_1} |\Sigma\otimes\Theta|_2^{\frac{1}{2}p_2}} \int |V_1|^{\frac{1}{2}(p_1+p_2-qN-1)}$$

$$e^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}[(\Sigma\otimes\Theta)_1^{-1}+(\Sigma\otimes\Theta)_2^{-1}F]V_1} {}_0F_1(\tfrac{1}{2}p_2; \tfrac{1}{4}(\Sigma\otimes\Theta)_2^{-1}\Xi(\Sigma\otimes\Theta)_2^{-1}FV_1)\, dV \qquad 4.150$$

Con la ayuda de 2.47 y 2.36 se tiene finalmente:

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}tr(\Sigma\otimes\Theta)_2^{-1}\Xi}\,|F|^{\frac{1}{2}(p_2-qN-1)}\,|(\Sigma\otimes\Theta)_1^{-1}+(\Sigma\otimes\Theta)_2^{-1}F|^{-\frac{1}{2}(p_1+p_2)}}{B_{qN}(\frac{1}{2}p_1,\frac{1}{2}p_2)\qquad |\Sigma\otimes\Theta|^{\frac{1}{2}p_1}\qquad |\Sigma\otimes\Theta|^{\frac{1}{2}p_2}}$$

$$_1F_1\{\tfrac{1}{2}p_2;\tfrac{1}{2}(p_1+p_2);\tfrac{1}{4}(\Sigma\otimes\Theta)_2^{-1}(\Sigma\otimes\Theta)_2^{-1}F[(\Sigma\otimes\Theta)_1^{-1}+(\Sigma\otimes\Theta)_2^{-1}F]^{-1}\}$$

4.151

Nota: $F[(\Sigma\otimes\Theta)_1^{-1}+(\Sigma\otimes\Theta)_2^{-1}F]^{-1}=[(\Sigma\otimes\Theta)_1^{-1}F^{-1}+(\Sigma\otimes\Theta)_2^{-1}]$

Corolario 4.4.2. Sean $V_1,V_2 \sim \mathbb{R}^{qNxqN}$, tal que $V_1 \sim W(qN,p_1,I_q\otimes I_N)$ y $V_2 \sim W(qN,p_2,I_q\otimes I_N,\Xi)$. Entonces $F = V_1^{-\frac{1}{2}}V_2V_1^{-\frac{1}{2}}$ se distribuye

$$f_{(F)} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\,tr\Xi}\,|F|^{\frac{1}{2}(p_2-qN-1)}\,|I+F|^{-\frac{1}{2}(p_1+p_2)}}{B_{qN}\,(\frac{1}{2}p_1,\frac{1}{2}p_2)}\ _1F_1[\tfrac{1}{2}p_2;\tfrac{1}{2}(p_1+p_2);\tfrac{1}{4}\Xi(I+F^{-1})^{-1}]$$

4.152

Prueba: Es inmediata del teorema anterior, sólo sustituya - $(\Sigma\otimes\Theta)_1 = (\Sigma\otimes\Theta)_2 = (I_q \otimes I_N)$

Teorema 4.4.6. Sea $B \in \mathbb{R}^{qNxqN}$ definida por 4.132, solo que ahora $V_1 \sim W(qN,p_1,I_q\otimes I_N)$. Entonces $f_{(B)}$ se puede escribir como:

$$f_{(B)}= \frac{e^{-\frac{1}{2}\Xi}\,|B|^{\frac{1}{2}(p_2-qN-1)}\,|I-B|^{\frac{1}{2}(p_1-qN-1)}}{B_{qN}(\frac{1}{2}p_1,\frac{1}{2}p_2)}\ _1F_1(\tfrac{1}{2}p_2;\tfrac{1}{2}(p_1+p_2);\tfrac{1}{4}\Xi B) \qquad 4.153$$

llamada Distribución Beta Multivariada No Central

Prueba: La f.d. de V_1 y V_2 tiene la forma:

$$f_{(V_1,V_2)}= \frac{e^{-\frac{1}{2}tr(\Xi+V_2+V_1)}\,|V_1|^{\frac{1}{2}(P_1-qN-1)}\,|V_2|^{\frac{1}{2}(p_2-qN-1)}}{2^{\frac{1}{2}qN(p_1+p_2)}\quad \Gamma_{qN}(\frac{1}{2}p_1)\quad \Gamma_{qN}(\frac{1}{2}p_2)}\ _0F_1(\tfrac{1}{2}p_2;\tfrac{1}{4}\Xi V_2)$$

4.154

Sea $S = V_1 + V_2$ y $V_2 = V_2$. Asi:

$$f_{(V_2,S)} = \frac{e^{-\frac{1}{2}tr\Xi}\, e^{-\frac{1}{2}trS}\, |S-V_2|^{\frac{1}{2}(p_1-qN-1)}\, |V_2|^{\frac{1}{2}(p_2-qN-1)}}{2^{\frac{1}{2}qN(p_1+p_2)}\Gamma_{qN}(\frac{1}{2}p_1)\Gamma_{qN}(\frac{1}{2}p_2)}\; {}_0F_1(\tfrac{1}{2}p_2;\tfrac{1}{4}\Xi V_2) \qquad 4.155$$

Tomando $B = S^{-\frac{1}{2}}V_2S^{-\frac{1}{2}}$, donde $S^{-\frac{1}{2}}\; S^{\frac{1}{2}} = S$; $f_{(B)}$ es dada por:

$$f_{(B)} = \frac{e^{-\frac{1}{2}tr\Xi}\, |I-B|^{\frac{1}{2}(p_1-qN-1)}\, |B|^{\frac{1}{2}(p_2-qN-1)}}{\Gamma_{qN}(\frac{1}{2}p_1)\; \Gamma_{qN}(\frac{1}{2}p_2)} \int_{S>0} e^{-\frac{1}{2}trS}\, |S|^{\frac{1}{2}(p_1+p_2-qN-1)}\; {}_0F_1(\tfrac{1}{2}p_2;\tfrac{1}{4}\Xi\; BS)dS \qquad 4.156$$

la integral puede ser resuelta usando 2.36 y 2.47.

Corolario 4.4.3. Si en las expresiones 4.136 y 4.148 $qN = 1$, obtenemos respectivamente la Distribución Centrada y No-centrada de T - Hotteling, Constantine A.G. [10], Ito K. [30], Kariva T. [38], y para el caso en que $p_2 = 1$, Hotteling H. [29].

Algunos casos particulares de los tratados en esta sección, así como sus aplicaciones son presentadas por Mitra K.S. [48], Kshirsagar A.M. [43], Davis A.W. [13], y Olkin I. [52].

Finalmente, es importante mencionar que tanto para la Distribución T como para las f.d. F y B, multivariadas, se pueden determinar sus correspondientes f.d. complejas, pero debido a la similitud, tanto de la f.d. como de sus pruebas, con las f.d. reales no serán incluidas.

BIBLIOGRAFIA

[1] Anderson, T.W. & Girschick M.A. (1944). Some extensions of the Wishart Distributions. Ann. Math. Statist. Vol. 14 p. 345-357.

[2] ____________. 1946. The Non-central Wishart Distribution and certain problems of Multivariate Statistics. Ann.Math. Statist. Vol. 17, p. 409-431.

[3] ____________. 1958. An introduction to Multivariate Statistical Analysis. Wiley, New York.

[4] Apostol, T.M. 1972. Análsis Matemático. Ed. Reverté, S.A. México

[5] Arnold, S.F. 1980. The Theory of Linear Models and Multivariate Analysis. John Wiley & Sons. New York.

[6] Ash, D.B. 1972. Real Analysis and Probability. Academic Press, New York.

[7] Bass, J. 1970. Elementos de cálculo de probabilidades. Toray-Masson, S.A. Barcelona.

[8] Bochner, S. 1944. Grup invariance of Cauchy's formula in several variables. Ann. of Math. Vol. 45, p. 686-722.

[9] Cavazos, C.R. 1984. Curso de Teoría Estadística I. UAAAN. México. - Comunicación personal.

[10] Constantine, A.G. 1963. Some Non-central Distribution problems in Multivariate Analysis. Ann.Math.Statist. Vol. 34, p.1270 1284.

[11] ——————. 1966. The Distribution of Hotelling's generalised T . Ann.Math.Statist. Vol. 37, p. 215-225.

[12] Cramer, H. 1970. Métodos Matemáticos de Estadística. Ed. Aguilar, S.A. Madrid.

[13] Davis, A.W. 1970. On the null distribution of the sum of the roots of a multivariate Beta Distributions. Ann.Math.Statist. Vol.41, p. 1557-1562.

[14] Demer, W.L. & Olkin F. 1951. The jacobians of certain matrix transformation useful in multivariate analysis. Biometrika. Vol. 38, p. 345-367.

[15] Dikey, J.M. 1967. Matricvariate generalizations of the multivariate t Distribution and the inverted multivariate t Distribution. Ann.Math.Statist., Vol. 37, p. 511-518.

[16] Dunn, O.J. 1965. A property of the Multivariate t-Distribution. Ann. Math. Statist., Vol. 36, p. 712-714.

[17] Dunnett, C.W. & Sobel M. 1955. Approximations to the probability integral and certain percentage points of a multivariate analogue of Student's t-Distributions . Biometrika, Vol. 42. , p. 258-260.

[18] Erdelyi, A. 1953. Higher trascendental functions. McGraw Hill, New York.

[19] Feller, W. 1978. Introduccion a la Teoría de Probabilidades y sus aplicaciones. Ed. Limusa. México.

[20] Geisser, S. & Cornifields, J. 1963. Posterior Distributions for - Multivariate parameters. J. Roy. Stat. Soc. Ser. B., - Vol. 25, pp. 368-376.

[21] Giri, N.C. 1977. Multivariate Statistical Inference. Academic Press New York.

[22] Goodman, N.R. 1963. Statistical Analisis based on a certain multivariate complex Gaussian Distribution (an introduction). Ann.Math.Statist., Vol.34, pp. 152-177.

[23] ______________. 1963. The Distribution of the determinant of a com - plex Wishart distributed matrix. Ann.Math.Stat.,Vol. 34, pp. 178-180.

[24] Graybill, F.A. 1961. An introduction to linear statistical models. Mc GrawHill. New York.

[25] ______________. 1969. Introduction to matrices with applications in statistics. Wadsworth Publishing Company, Inc. Belmont Cal.

[26]. Haff, L.R. 1979. An identity for the Wishart Distribution with - applications. J. Multi. Analysis. Vol. 9, pp. 531-544.

[27] Hall, M., Jr. 1979. Teoría de los grupos. Ed. Trillas, México.

[28] Herz, C.S. 1955. Bessel Funtions of matrix argument. Ann. of Math. Vol. 61, pp. 474-523.

[29] Hotelling, H. 1931. The generalization of Student's ratio. Ann. - Math.Statist. Vol. 2, pp.359-378.

[30] Ito, K. 1956. Asymptotic formulae for the Distribution of Hote - lling's generalized T^2 statistic. Ann.Math. Statist. - Vol. 27, pp. 1091-1105.

[31] James, A.T. 1954. Normal multivariate analysis and the ortogonal - grup. Ann.Math.Statist. Vol. 25, pp.40-75.

[32] ___________. 1955. The noncentral Wishart Distribution. Proc. Roy. Soc. Sec. A. Vol. 229, pp. 364-366.

[33] ___________. 1960. The distribution of the latent rootes of cova - riance matrix. Ann.Math.Statist. Vol. 31, pp. 151-158.

[34] ___________. 1961. The distribution of noncentral means with known covariance. Ann.Math.Statist. Vol. 32, pp. 874-882.

[35] ___________. 1961. Zonal Polinomials of the real positive definite symmetric matrices. Ann. of Math. Vol. 74, pp. 456-469.

[36] ___________. 1964. Distribution of matrix variates and latent roots derived from normal semples. Ann.Math.Statist. Vol. 35, - pp. 475-501.

[37] Jensen, D.R. 1968. The joint distribution of trace of Wishart ma - trices and some applications. Ann.Math.Statist. Vol. 41, pp. 133-145.

[38] Kariya, T. 1981. A robustness property of Hotelling's T^2 test Ann. Math.Statist. Vol. 1, pp. 211-214.

[39] Khatri, C.G. 1980. The necessary and sufficient conditions for de- pendent quadratic forms to be distributed as multivariate Gamma. J. Multiv. Analisis. Vol. 10, pp. 233-242.

[40] Krishnaiah, P.R. 1976. Some recent developments of complex multiva riate distributions J. Multiv. Analysis. Vol. 6, pp. 1-30

[41] Kshirsagar, A.M. 1959. Bartlett descomposition and Wishart Distri- butions. Ann. Math. Statist. Vol. 30, pp. 239-241.

[42] Kshirsagar, A.M. 1960. Some extensions of the multivariate t-distri bution and the multivariate generalization of the distribution of the regression coeficient. Proc. Cambridge, Phil. Soc. Vol. 57, pp. 80-85.

[43] ______________. 1961. The non-central multivariate Beta Distribution. Ann.Math.Statist. Vol. 32, pp. 104-111.

[44] ______________. 1981. Multivariate Analysis. Marcel Dekker. New - York.

[45] Lawley, D.N. 1938. A generalization of Fisher's Z-test. Biometrika. Vol. 30, pp. 180-187.

[46] Lin, P.E. 1972. Some caracterizations of the multivariate t-distribution. J. Multiv. Analysis, Vol. 2, pp. 339-344.

[47] Miller, K.S. 1968. Some multivariate t-distributions. Ann.Math. - Statist. Vol. 39, No. 5, pp. 1605-1609.

[48] Mitra, S.K. 1970. Analogues of multivariate Beta (Dirchlet) Distri bution. Sankhya, Series A, Vol. 32, pp. 189-192.

[49] Moncayo, A.R. 1980. Introducción a la probabilidad. Fondo de Cultu ra Económica. México.

[50] Morrison, D.F. 1976. Multivariate Statistical Methods. Mc Graw Hill New York.

[51] Olkin, I. & Roy, S.N. 1954. On multivariate distribution theory. - Ann.Math.Statist. Vol. 25. pp. 322-339.

[52] Olin, I. & Rubin, N.H. 1964. Multivariate Beta Distributions and - independence properties of the Wishart Distributions. Ann. Math. Statist. Vol. 35, pp. 261-269.

[53] Perez G., L.A. 1979. Studiul Statistico-Matematic al calitatii si fiabilitatii in cazul multidimensional (en rumano) Tesis doctoral. Bucarest, Rumania.

[54] Pérez G., L.A. & Vaduva, I. 1979. On multivariate central limit - theorem with statistical aplications to reliability. Ed. Academiei Bucuresti, Romania.

[55] Pérez G., L.A. 1980. Gauss-Markov estimation for multivariate li - near models: A classical approach. Analele Universitatii Vucurestii, Romania.

[56] ______________. 1981. Estadística Matemática. Centro de Investiga - ción y de Estudios Avanzados del IPN. México.

[57] ______________. 1984. Curso Análisis Multivariado. UAAAN. México. Comunicación personal.

[58] Pillai, C.S. & Jouris, G.M. 1971. Some distribution problem in the multivariate complex Gaussian case. Ann.Math.Statist. - Vol. 42, No. 2, pp. 317-325.

[59] Pringle, R.M. & Rayner, A.A. 1971. Generalized inverse matrices - with aplications to statistics. Griffin, London.

[60] Press, S.J. 1972. Multivariate stable distributions. J. Multiv. - Analysis. Vol. 2, pp. 444-462.

[61] Rao, C.R. & Mitra, S.K, 1971. Generalized inverses of matrices and aplications. Wiley, New York.

[62] Rao, C.R. 1973. Linear Statistical Inference and its applications. 2nd ed. Wiley, New York.

[63] Saw, G.J. 1973. Expectation of elementary symetric functions of a Wishart matrix. Ann. of Statist. Vol. 1, No. 3. pp. 580-582.

[64] Searle, S.R. 1971. Linear models. John Wiley & Sons. Inc. New York

[65] Serge, L. 1976. Algebra lineal. Fondo Educativo Interamericano. Mé xico.

[66] Shah, B.K. & Kmatri, C.G. 1971. Proof of conjectures about the expected values of elementary simetric function of a noncen tral Wishart matrix. Ann. of Statist. Vol. 2, No. 4. - pp. 833-836.

[67] Shaman, P. 1980. The inverted complex Wishart Distribuction and - its applications to spectral estimation. J. Mutiv. Analysis. Vol. 10, pp. 51-59.

[68] Silverger, A.J. 1979. Introduction to harmonic analysis on reducti ve p-adic groups. Princeton, New Jersey.

[69] Sirivastava, M.S. 1965. On the complex Wishart Distribution. Ann. Math. Statist. Vol. 36, pp. 313-315.

[70] ________________. 1968. On the distribution of a multiple correlation matrix. Non-central multivariate Beta Distributions. Ann.Math.Satist. Vol. 39, No. 1. pp. 227-332.

[71] Sirivastava, M.S. & C.G. Khatri. 1979. An introduction to multivariate statistics. North Holland. New York.

[72] Tiao, G.C. & Zellaer, A. 1964. On tye Bayesian Estimation of Multi variate regression. J. Roy. Stat.Soc.Ser. B. Vol. 26, - pp. 277-285.

[73] Troskie, C.G. 1971. The distributions of some test criteria in multivariate analysis. Ann.Math.Satist. Vol. 42, No. 1, pp. 1752-1757.

[74] Wagle, B. 1968. Multivariate Beta Distribution and a test for multivariate normality. J. Roy. Stat. Soc. Ser. B. Vol. 30, pp. 511-516.

[75] Wooding, R.A. 1956. The multivariate distributions of complex normal variables. Biometrika. Vol. 43, pp. 212-215.

A P E N D I C E

APÉNDICE A

El presente apéndice se encontrará:

i) $E(X)$

ii) $V(X)$ $\quad X \in \mathbb{R}^{p\times r}$ M.A. con f.c. dada por 4.4

a partir de su f.c., es decir, aplicando la relación 3.37

i) $E(X)$, recuerde primero que:

$$\phi_X(T) = C^{itr\mu' T - \frac{1}{2}tr(T' \Sigma T \Theta)}$$

$$= C^{itr\, \tilde{T}'\tilde{\mu} - \frac{1}{2}\tilde{T}'(\Sigma \otimes \Theta)\tilde{T}} \quad \text{(por 4.10)}$$

Encontremos[1]

$$\phi_X'(T) = [i\tilde{\mu} - \tfrac{1}{2}(2)(\Sigma \otimes \Theta)\tilde{T}]\,\phi_X(T)$$

Evaluando en $T = 0$, se encuentra:

$$\phi_{\tilde{X}}'(0) = i\tilde{\mu}$$

Asi por la expresión 4.37 se tiene:

$$\frac{1}{i}\,\phi_{\tilde{X}}'(0) = E(\tilde{X}) = \tilde{\mu}$$

1 Recuerde que el jacobiano de $Y = XAX'$ $\quad$ 2AX (Graybill, F. A. [25], pag.262)

ii) Se encontrará ahora la v(x), recordemos que:

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Determinemos $\phi''_{\tilde{X}}(T)$

$$\phi''_{\tilde{X}}(T) = [i\tilde{\mu} - (\Sigma\otimes\Theta)\tilde{T}]\phi'_{\tilde{X}}(T) + \phi_X(T)[-(\Sigma\otimes\Theta)]$$

Evaluando en $T = 0$

$$\phi''_{\tilde{X}}(0) = [i^2\tilde{\mu}\tilde{\mu}'] - \Sigma\otimes\Theta = -\tilde{\mu}\tilde{\mu}' - \Sigma\otimes\Theta \quad [i^2 = -1]^2$$

Multiplicando por i^{-2} en ambos lados de la ecuación, y por 3.37 se obtiene:

$$\frac{1}{i^2}\phi_X(0) = \tilde{\mu}\tilde{\mu}' + (\Sigma\otimes\Theta) = E(X^2)$$

Finalmente:

$$Var(X) = \tilde{\mu}\tilde{\mu}' + \Sigma\otimes\Theta - \tilde{\mu}\tilde{\mu}'$$

$$= \Sigma\otimes\Theta$$