

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA AGRARIA ANTONIO NARRO
DIVISIÓN DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE RIEGO Y DRENAJE



SOLUCIÓN HIDRÁULICA DE SISTEMAS DE ABASTECIMIENTO DE AGUA,
MEDIANTE BOMBAS, POR EL MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON Y CON
MÉTODOS MATRICIALES, COMPARADAS CON SOLUCIONES GRAFO-
ANALÍTICAS.

POR: JUDITH ISABEL TORRES DE LA CRUZ

TESIS

PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

INGENIERO AGRÓNOMO EN IRRIGACIÓN

BUENAVISTA, SALTILLO, COAHUILA, MÉXICO. JUNIO 2023

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA AGRARIA ANTONIO NARRO
DIVISIÓN DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE RIEGO Y DRENAJE

Solución hidráulica de sistemas de abastecimiento de agua, mediante bombas, por el método de Newton-Raphson y con métodos matriciales, comparadas con soluciones grafo-analíticas.

POR: JUDITH ISABEL TORRES DE LA CRUZ

TESIS

PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
INGENIERO AGRÓNOMO EN IRRIGACIÓN

Aprobada por el comité de Asesoría:


Aprobada por:


Dr. Sergio Zeferino Garza Vara
PRESIDENTE DEL JURADO


Dr. Luis Samaniego Moreno

VOCAL




M.C. Sergio Sánchez Martínez

COORDINADOR DE LA DIVISIÓN DE INGENIERÍA


Ing. Nazario Rosas Pizano

VOCAL

Buenavista, Saltillo, Coahuila México. Junio 2023.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA AGRARIA ANTONIO NARRO
DIVISIÓN DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE RIEGO Y DRENAJE

Solución hidráulica de sistemas de abastecimiento de agua, mediante bombas, por el método de Newton-Raphson y con métodos matriciales, comparadas con soluciones grafo-analíticas.

POR: JUDITH ISABEL TORRES DE LA CRUZ

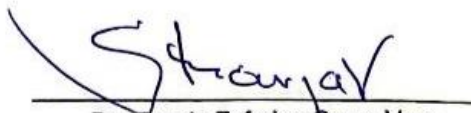
TESIS

PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

INGENIERO AGRÓNOMO EN IRRIGACIÓN

Aprobada por el H. Jurado Examinador:

Aprobada por:



Dr. Sergio Zeferino Garza Vara

ASESOR PRINCIPAL



Dr. Luis Samaniego Moreno

ASESOR



Ing. Nazario Rosas Pizano

ASESOR EXTERNO

Buenavista, Saltillo, Coahuila México. Junio 2023.

DECLARACIÓN DE NO PLAGIO

El autor quien es responsable directo, jura bajo protesta decir la verdad, que no se incurrió en plagio o conducta académica incorrecta en los siguientes aspectos:

Reducción de fragmentos o textos sin citar la fuente o autor original (copiado y pegado); reproducir un texto propio publicado anteriormente sin hacer referencia al documento original (auto plagio); comprar, robar o pedir prestados datos o la tesis para presentarla como copia; omitir referencias bibliográficas o citar textualmente sin comillas; utilizar material digital como imágenes, videos, ilustraciones, graficas, mapas o datos sin citar el autor original y/o fuente. En este sentido, lo anterior puede ser confirmado por el lector, estando consiente de que, en caso de comprobarse plagio del texto al no respetar los derechos de autor, edición o modificación, será sancionado por las autoridades correspondientes. Por lo anterior me responsabilizo de la consecuencia generada en caso de existir cualquier tipo de plagio y declaro que este trabajo es original.

Así mismo declaro que mi proyecto es de continuidad, desarrollado en la ciudad de Saltillo, Coah. SIN TECHO FINANCIERO, amparado por el número de clave 38111-425401001-424 registrado en la subdirección de investigación de nuestra institución y cuyo nombre del proyecto es ***"Solución hidráulica de sistemas de abastecimiento de agua, mediante bombas, por el método de Newton-Raphson y con métodos matriciales, comparadas con soluciones grafo-analíticas"***.

Autor principal



Judith Isabel Torres de la Cruz

Agradecimientos

Primero que nada, quiero agradecer a mi padre Dios, que me dejó terminar este gran proyecto, me dio aliento cuando lo necesité, y me fortaleció espiritualmente para poder llevar a cabo todas y cada una de mis metas.

“El Señor es mi pastor nada me faltará, en verdes praderas me hace recostar; me conduce hacia fuentes tranquilas y repara mis fuerzas; me guía por el sendero justo, por el honor de su nombre”. -Salmo 22.

A mi Alma Terra Mater, de la cual conocí personas maravillosas que siempre me ayudaron en mi camino, me llevo las mejores enseñanzas y conocimientos no solo académicos si no, también de vida. Le doy las gracias por haberme abierto las puertas cinco años de mi vida, donde reí, lloré, me divertí y gocé mi etapa universitaria. La que presto sus cálidas instalaciones y la que hoy con orgullo digo que es MI SEGUNDA CASA.

A mi querido Dr. Sergio Garza Vara, por convertirse en mi segundo padre, por siempre apoyarme en todo momento, por abrirme las puertas de su lindo hogar y hacerme sentir como en casa. Gracias a él hoy esta tesis es posible, por su gran dedicación como docente y admirable honor como ser humano. A su querida esposa Mireya, quien es mi segunda madre, siempre al pendiente de mí y quien siempre me recibía con una hermosa sonrisa. Eternamente agradecida con ustedes.

A mis roomies de casa, quienes estos años formamos lazos de hermandad y solidaridad, quienes estuvieron en mis peores y mejores momentos, a mi querida Dani Reyes por ser mi hermana mayor y siempre estar para mí, a Mary Campa por

demostrarme su verdadera amistad y lealtad, a mi Carlita Valadez quien me ha enseñado grandes consejos de vida y con quien compartí momentos extraordinarios, gracias por darme a la mejor sobrinita del mundo mi querida Chofis, a mi Jaz Espino adorada, con quien viví las mejores aventuras, a mi Elvia y Alissa por siempre alegrarme y ser tan tiernas conmigo. Infinitas gracias las llevo a cada una en mi corazón ¡Por siempre ANTARES!

A casa Jalisco, por todas las aventuras vividas y por todas las personas extraordinarias que conocí. A mi querido Yael Arellano, por su gran cariño y apoyo incondicional, a mis queridos Lio Salinas y a Paco de Anda por ser mis hermanitos y siempre cuidar de mí.

A mi mejor amigo de la carrera Luis Mario Heredia, quien siempre estuvo conmigo en todo momento y me ayudo en el transcurso de estos años.

A las hermosas secretarias de riego, Mary y Clau, por siempre apoyarme y ser tan lindas conmigo.

¡Gracias a todos y cada uno de ustedes, por siempre los llevo en mi corazón,

Dios los bendiga!

Dedicatorias

Quiero dedicar este proyecto en especial a mi querido padre y maestro Ramón Torres Hernández † (1958-2022). Gracias papi por todas tus enseñanzas, aunque han sido tiempos difíciles siempre serás mi eterno amor, a donde quiera que estes te dedico este triunfo que prometo no será el último. ¡Te amo papi!

A mi hermosa madre Judith de la Cruz Corona, por siempre ser mi pilar en este recorrido, por nunca dejarme y siempre estar al pendiente mí. Tu eres mi mayor admiración y ejemplo a seguir, ¡Mi querida maestra!

A mis hermanos Elías Torres, por ser mi inspirador en esta gran profesión, a Isaac Torres, por siempre estar al pendiente.

A mi segundo Padre el Dr. Sergio Garza Vara y la Sra. Mireya López por abrirme las puertas de su hogar.

A mi querida maestra Blanca Elizabeth Zamora y al Dr. Juan José Galván Luna por ser una gran inspiración y amar su vocación.

Resumen

Este proyecto de investigación es la continuidad de la tesis publicada anteriormente con el título: “Un nuevo método grafo-analítico” (Mata, 2008).

El método grafo analítico y el método matricial se basan en la ecuación de Bernoulli para líquidos reales. Ambos métodos determinan la distribución de caudales en una red abierta con bombas interconectadas. Donde se toman en cuenta las pérdidas de energía del flujo de agua a lo largo de cada ramal, considerando la ecuación de Darcy-Weisbach para el cálculo de dichas pérdidas conocidas como pérdidas de carga.

Karassik et al. (1983). Muestra el método clásico para solucionar la interconexión de bombas en redes abiertas, conocido como método de Messina y consiste en un método grafo analítico donde cada curva de la gráfica representa las pérdidas de carga de cada ramal que se van sumando en serie o en paralelo según como estén interconectadas las líneas de conducción, tomando en cuenta las presiones hidrostáticas por altura de los depósitos (Z) y la curva característica de la bomba de carga (H) versus descarga (Q).

El método matricial puede resolver una ecuación no lineal con el método de Newton-Raphson y también resuelve dos o más ecuaciones no lineales al utilizar matrices Jacobianas donde cada elemento de la matriz es una derivada parcial.

Palabras clave: (Método grafo analítico, matrices Jacobianas, pérdidas de carga, Newton-Raphson).

Abstract

This research Project is the continuation of the previously published thesis with the title: "A new graph-analytical method" (Mata,2008).

The graph analytic method and the matrix method are based on Bernoulli's equation for real liquids. Both methods determine the flow distribution in an open network with interconnected pumps. Where the energy losses of the water flow along each branch are taken into account, considering the Darcy-Welsbach equation for the calculation of losses known as load losses.

Karassik et al. (1983). It shows the classic method to solve the interconnection of pumps in open networks, known as the Messina method and consists of an analytical graph method where each graph curve represents the load losses of each branch that are added in series or in parallel depending on how the conduction lines are interconnected, taking into account the hydrostatic pressures by height of the deposits (Z) and the characteristic curve of the loading pump (H) versus discharge (Q).

The matrix method can solve one nonlinear equation using the Newton-Raphson method, and it can also solve two or more nonlinear equations using Jacobian matrices where each element of the matrix is a partial derivate.

Key words: (Analytical graph method, Jacobian matrices, head losses, Newton Raphson).

Índice de contenido

Agradecimientos	4
Dedicatorias	6
Resumen.....	7
Abstract.....	8
Índice de ilustraciones.....	10
Índice de tablas	12
1. Introducción	13
1.1 Hipótesis General.....	15
1.2 Objetivo General	15
1.3 Objetivos Específicos	15
2. Revisión de literatura	16
2.1 Fundamentos de mecánica de fluidos.....	16
2.2 Flujo de conductos de presión	19
2.3 Bombas	27
2.4 Programas comerciales para el diseño de redes	34
3. Materiales y métodos.....	35
3.1 Desarrollo de las matrices Jacobianas para la solución de redes abiertas	35
3.1.1 Desarrollo por el método de Newton-Raphson	36
3.2 Desarrollo del nuevo método grafo analítico para la solución de redes abiertas	42
4. Resultados y discusión	43
4.1 Comparación de los resultados grafo-analíticas con las matrices jacobianas.....	43
4.2 Tabla de comparación de caudales con el método grafo analítico versus matrices jacobianas.	85
4.3 Prueba estadística de los resultados.....	86
5. Conclusión y recomendaciones	89
6. Bibliografía.....	90
7. Apéndice.....	94

Índice de ilustraciones

Ilustración 1: Interpretación gráfica de los niveles de referencia para determinar presión absoluta, relativa y atmosférica.	18
Ilustración 2: Perdidas de cargas por longitud (Extraído de la fuente: https://dtingenieria.wordpress.com/2014/11/26/bernoulli-la-presion-en-las-tuberias-y-la-perdida-de-carga-iii/)	22
Ilustración 3: Tornillo de Arquímedes (Fuente extraída de. https://cafeytech.substack.com/p/el-tornillo-de-arquimedes).....	27
Ilustración 4: Rueda de persa en Armadillo de los Infante, San Luis Potosí, México. .	28
Ilustración 5: Bomba centrífuga tipo voluta (Fuente extraída de: https://www.iagua.es/blogs/miguel-angel-monge-redondo/algunas-observaciones-instalaciones-equipos-bombeo)	29
Ilustración 6: Bomba sumergible Altamira (Fuente extraída de: https://mortonpumps.com/bombas-altamira/)	30
Ilustración 7: Curva característica de la bomba seleccionada.....	51
Ilustración 8: Curva característica de la bomba seleccionada.....	57
Ilustración 9: Curva característica de la bomba seleccionada, problema dos.	58
Ilustración 10: Curva característica de la bomba seleccionada del problema tres.	67
Ilustración 11: Bomba Centrífuga Berkeley, Modelo B3EPBL de 60 HP. 9.250” Dia.....	68
Ilustración 12: Curva característica de la bomba sumergible del problema tres.	69
Ilustración 13: Bomba sumergible Berkeley. Modelo 7T-350. 40 HP	70
Ilustración 14: Curva característica de la bomba seleccionada, problema cuatro.....	81
Ilustración 15: Representación del Diagrama de Moody (Fuente extraída de: https://diagramaweb.com/moody/)	94

Ilustración 16: Programa de Visual Basic, para determinar el coeficiente de f.....	95
Ilustración 17: Coeficientes de rugosidad absoluta.	95
Ilustración 18: Tabla de viscosidad cinemática.	95
Ilustración 19: Coeficientes de perdidas menores.....	95
Ilustración 20: Tabla de valores de Ji cuadrada (Fuente extraída de: https://www.monografias.com/trabajos-pdf5/prueba-chi-cuadrada-estadistica/prueba-chi-cuadrada-estadistica).	95

Índice de tablas

Tabla 2: Ecuación de la curva característica de la bomba.....	51
Tabla 3: Método grafo analítico del problema uno.....	52
Tabla 4: ecuación de la bomba pozo uno, problema dos.	57
Tabla 5: ecuación de la bomba, pozo dos, del problema dos.....	58
Tabla 6: Método grafo analítico del problema dos.....	61
Tabla 7: Ecuación de la bomba centrífuga seleccionada del problema tres.	67
Tabla 8: Ecuación de la bomba sumergible del problema tres.	68
Tabla 9: Método grafo analítico del problema tres.....	71
Tabla 10: Ecuación de la bomba seleccionada del problema cuatro.	81
Tabla 11: Método grafo analítico del problema cuatro.....	82
Tabla 12: Tratamiento del problema uno.....	85
Tabla 13: Tratamiento del problema dos.	85
Tabla 14: Tratamiento del problema tres.	85
Tabla 15: Tratamiento del problema cuatro.	86
Tabla 16: Prueba de Ji cuadrada aplicada a los cuatro tratamientos.	87

1. Introducción

Los volúmenes de aguas nacionales concesionados o asignados a los usuarios se inscriben en el Registro Público de Derechos de Agua (REPDA), agrupándose para fines consuntivos y no consuntivos. Al 2018 el 60.8% del agua para uso consuntivo provenía de fuentes superficiales (ríos, arroyos, lagos y presas), el resto de aguas subterráneas. Del total del volumen concesionado para usos agrupados consuntivos, al 2018 el 75.7% le correspondía a la agricultura. (SAGARPA, 2019). Según datos de la Comisión Nacional del Agua (CONAGUA, 2021), hasta agosto del 2021, en el país había 653 acuíferos disponibles de los cuales 157 presentaban sobreexplotación, es decir, el 24% del total. La cifra para el 2020 fue la misma, sin embargo, para el 2019 se tenían documentados 115 acuíferos bajo esta condición.

Para recordar, un acuífero se define como cualquier formación geológica o conjunto de formaciones geológicas hidráulicamente conectados entre sí, por las que circulan o se almacenan aguas del subsuelo que pueden ser extraídas para su explotación uso o aprovechamientos y cuyos límites laterales y verticales se concretan convencionalmente para fines de evaluación, manejo y administración de las aguas nacionales del subsuelo. (Ley de Aguas Nacionales, 1992).

Como es sabido, los acuíferos son explotados cada vez más cada año, para fines agrícolas, industriales y domésticos. Por lo que es necesario implementar un programa intensivo para el reúso del agua, donde el principal usuario sería los propios organismos encargados del abasto a las poblaciones, en el riego de jardines o el uso en establecimientos como los de lavado de vehículos y aún en los usos residenciales. En ambos casos, en esta conclusión y la anterior, será necesario revisar los compromisos

aguas abajo y su reprogramación. Las propuestas estructurales que se contemplan son el uso del agua superficial para la recarga de acuíferos, uso eficiente y reúso del agua. A fin de incrementar el uso del agua superficial es necesario construir presas que retengan las aguas broncas, y definir sistemas de aprovechamiento y/o zonas de recarga a los acuíferos (Peña-Díaz,2019).

En México existen un gran número de bombas que están interconectadas en redes de conducción abiertas, muchas de ellas no tienen un cálculo previo y las bombas se interconectaron en forma empírica, esto puede ocasionar que existan *flujos estrangulados* en las líneas de conducción. Provocando que el caudal y la presión requerida no sea la que se demanda para un uso eficiente del sistema de riego, que a su vez afecta las tarifas eléctricas por ser excesivamente altas, porque con el factor de potencia la Comisión Federal de Electricidad sanciona y penaliza la baja eficiencia eléctrica, tomando en cuenta el factor de potencia en su artículo 64 (Reglamento de la Ley del Servicio Público de Energía Eléctrica, 1993).

Con modelos matemáticos, abstractos, se puede diseñar una red abierta eficiente con interconexión de bombas emplazadas arbitrariamente. Este modelo matemático debe ser determinístico, que emplee información heurística y empírica fundamentada en las ecuaciones de la energía del flujo de agua, que toma en cuenta sus pérdidas en la red basándose en la ecuación de continuidad. Es un modelo comparativo entre un método conocido como nuevo método grafo analítico y el uso de matrices Jacobianas, de los cuales se obtienen ciertas representaciones numéricas mediante fórmulas y algoritmos matemáticos.

1.1 Hipótesis General

El método de matices jacobianas se ajusta al nuevo método grafo analítico en la solución de interconexión de bombas que conforman una red abierta, para determinar la distribución de caudales y abastecer adecuadamente sistemas de riego agrícola.

1.2 Objetivo General

Esta tesis va dirigida a los alumnos de la carrera de Ingeniero Agrónomo en Irrigación para que empiecen a utilizar matrices para la solución de interconexión de bombas en redes abiertas, para irrigar campos agrícolas.

1.3 Objetivos Específicos

- a) Facilita la selección de bombas de agua para irrigar campos agrícolas.
- b) Facilita la selección de diámetros en las líneas de conducción, tanto económica como hidráulicamente.
- c) Determina si en las líneas de conducción existe estrangulamiento de flujos.
- d) Facilita el diseño de interconexión de bombas en redes abiertas.

2. Revisión de literatura

2.1 Fundamentos de mecánica de fluidos.

La viscosidad μ frecuentemente se conoce como viscosidad absoluta o viscosidad dinámica. La viscosidad es aquella propiedad del fluido mediante la cual este ofrece resistencia al esfuerzo cortante. La resistencia de un fluido al corte, depende de su cohesión y de la tasa de transferencia de momentum molecular. Por consiguiente, la cohesión parece ser la causa predominante de la viscosidad en un líquido y puesto que disminuye con la temperatura, la viscosidad también lo hace.

La ley de viscosidad de Newton establece que, para una tasa dada de deformación angular del fluido, el esfuerzo cortante es directamente proporcional a la viscosidad (Streeter *et al.*, 2000):

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad 2.1.1$$

La relación du/dy es la tasa de deformación angular del fluido que expresa el cambio de velocidad dividido por la distancia en que este ocurre. El gradiente de velocidad du/dy también puede visualizarse como la tasa a la cual una de las capas se mueve con relación a otra adyacente. En forma diferencial, es la relación entre el esfuerzo cortante y la tasa de deformación angular para el flujo unidimensional de un fluido.

Para presiones ordinarias, la viscosidad es independiente de la presión y depende únicamente de la temperatura. Para presiones muy grandes, los gases y la mayoría de los líquidos muestran variaciones erráticas de la viscosidad con la presión.

Un fluido en reposo o en movimiento de tal manera que ninguna capa se mueva con respecto a las capas adyacentes, no generará fuerzas cortantes aparentes, a pesar de la viscosidad, debido a que du/dy es cero a través del fluido. Por consiguientes, en el estudio de la estática de fluidos no se pueden considerar fuerzas cortantes debido a que ellas no ocurren en un fluido estático, y los únicos esfuerzos que permanecen son los normales, o presiones. Resolviendo para la viscosidad μ

$$\mu = \frac{\tau}{du/dy} \quad 2.1.2$$

insertando las dimensiones F , L y T para fuerza, longitud y tiempo, respectivamente, $\tau: FL^{-2}$, $u: LT^{-1}$, $y: L$.

muestra que μ tiene las dimensiones $FL^{-2}T$. Con la dimensión fuerza expresada en términos de masa, utilizando la segunda ley de movimiento de Newton, $F = MLT^{-2}$, las dimensiones de la viscosidad pueden expresarse como $ML^{-1}T^{-1}$.

La unidad de la viscosidad de SI, newton-segundo por metro cuadrado ($N \cdot s/m^2$) o kilogramo por metro-segundo ($kg/m \cdot s$), no tiene nombre. La unidad de viscosidad USC (también sin nombre) es $1lb \cdot s/pie^2$ o $1slug/pie \cdot s$ (estas dos son idénticas). Una unidad común de viscosidad en el sistema cgs, se conoce como el poise (P); este es $1dina \cdot s/cm^2$ o $1g/cm \cdot s$. La unidad SI es 10 veces mayor que la unidad poise (Streeter *et al.*, 2000).

Al hacer cálculos que involucren la presión de un fluido, se deben efectuar en relación con alguna presión de referencia (Mott,2006). Es normal que la atmósfera sea la presión de referencia. Así, la presión que arroja la medición del fluido se llama presión manométrica. Una presión manométrica superior a la presión atmosférica siempre es positiva, mientras que una presión manométrica inferior a la presión atmosférica es

negativa y se le conoce como vacío. La presión manométrica se expresará en unidades de Pascal o libra por pulgada cuadrada. La presión que se mide en relación con vacío perfecto se denomina presión absoluta, un vacío perfecto es la presión más baja posible. Por tanto, una presión absoluta siempre será positiva. Esta se expresa en las mismas unidades de la presión manométrica. Es muy importante que se conozca la diferencia entre estas dos maneras de medir la presión, para poder convertir una en la otra.

Una ecuación sencilla que relaciona los dos sistemas de medición de la presión es:

$$P_{abs} = P_{atm} \pm P_{man}$$

2.1.3

donde la P_{abs} es la presión absoluta, P_{man} es la presión manométrica y P_{atm} es la presión atmosférica (Streeter *et al.*, 2000).

Lo anterior se representa en la ilustración 1.

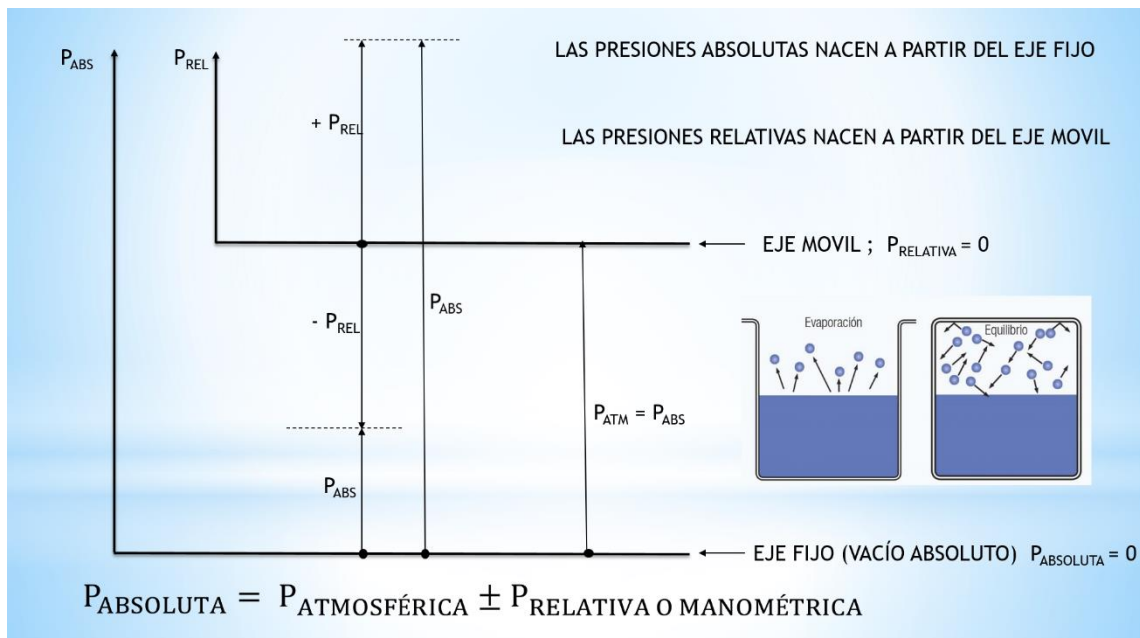


Ilustración 1: Interpretación gráfica de los niveles de referencia para determinar presión absoluta, relativa y atmosférica.

2.2 Flujo de conductos de presión

El flujo permanente ocurre cuando las condiciones en cualquier punto de fluido no cambian con el tiempo. No existe cambio en la densidad ρ , en la presión p y en la temperatura T , en ningún punto, con respecto al tiempo. Matemáticamente se pueden representar:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial t} = 0; \quad \text{etc.} \qquad 2.2.1$$

Las tuberías interconectadas en redes cerradas, en las cuales el flujo en una salida dada puede venir de diferentes líneas de conducción, se conocen como redes de tuberías, análogas al flujo a través de redes eléctricas. Los problemas en estas redes, en general, son complejos y requieren soluciones de prueba y error en las cuales los circuitos elementales se balancean en tandas hasta que todas las condiciones del flujo se satisfagan. Las siguientes condiciones se deben satisfacer en una red de tuberías:

1. La suma algebraica de las caídas de presión en cada circuito debe ser cero.
2. El caudal de entrada debe ser igual al de salida en cada unión.
3. Se debe satisfacer la ecuación de Darcy-Weisbach, o una fórmula equivalente exponencial de fricción.

La primera condición establece la caída de presión entre cualquier par de puntos en el circuito. La segunda condición es la ecuación de continuidad.

Debido a que es impráctico resolver analíticamente los problemas de redes, se utilizan métodos de aproximaciones sucesivas. El método de Hardy Cross es uno, en el cual se suponen los caudales para cada tubería, de tal manera que la ecuación de

continuidad se satisface en cada unión. Luego se calcula una corrección para el caudal en cada circuito y se aplica para balancear mejor los circuitos.

Si los parámetros cambian con respecto al tiempo el flujo es un flujo no permanente, es decir:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0; \quad \frac{\partial p}{\partial t} \neq 0; \quad \frac{\partial T}{\partial t} \neq 0; \quad \text{etc.} \quad 2.2. 2$$

El tiempo necesario para que el flujo en una tubería se establezca después de que una válvula se abre en forma súbita puede determinarse fácilmente teniendo en cuenta la fricción y las pérdidas menores. En el instante en el que se abre una válvula la carga H se encuentra disponible para acelerar el flujo, pero a medida que la velocidad se incrementa, la carga de aceleración se reduce debido a la fricción y las pérdidas menores. Si L es la longitud de la tubería y la velocidad que queda es V entonces la ecuación de Darcy- Weisbach será:

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} = \frac{8fLQ^2}{\pi^2 D^5 g} \quad 2.2. 3$$

Donde f es el coeficiente de fricción, L es la longitud de la tubería, D es el diámetro interno del conducto, V es la velocidad, g es la aceleración de la gravedad terrestre y Q es el caudal que transporta la tubería.

La ecuación Darcy se utiliza para calcular la pérdida de energía debido a la fricción en secciones rectilíneas y largas de tubos redondos, tanto para flujo laminar como turbulento. La diferencia entre los dos flujos está en la evaluación del factor de fricción adimensional f .

El flujo laminar se define como el flujo en el cual el fluido se mueve en capas, o laminas adyacentes, que se deslizan suavemente una sobre otra, únicamente con el

intercambio molecular de momentum. Cualquier tendencia a la inestabilidad y su turbulencia son atenuadas por las fuerzas cortantes viscosas que resisten el movimiento relativo de capas fluidas adyacentes. Sin embargo, en el fluido turbulento las partículas fluidas tienen un movimiento muy errático, con un intercambio de momentum transversal violento. La naturaleza del flujo, es decir, si es laminar o turbulento, y su posición relativa es una escala que muestra la importancia relativa de las tendencias turbulentas a laminares están indicadas por el *número de Reynolds* (por su autor Osborne Reynolds)

Reynolds encontró que el grupo adimensional $ul\rho/\mu$ debe ser igual para ambos casos. La cantidad u es la velocidad característica, l es una longitud característica, ρ es la densidad de masa y μ la viscosidad. Este grupo, o parámetro, hoy en día se conoce como el número de Reynolds **R**, el cual es igual a:

$$R = \frac{ul\rho}{\mu} \quad 2.2.4$$

Reynolds llevo a cabo sus experimentos sobre un flujo de agua a través de tubos de vidrio, tomo la velocidad promedio \mathcal{V} como la velocidad característica y el diámetro del tubo D como la longitud característica, de tal manera que

$$R = \frac{VD\rho}{\mu} \quad 2.2.5$$

Los tipos de flujo están definidos a continuación:

Flujo laminar: $Re \leq 2100$

Flujo critico: $2100 \leq Re \leq 4000$; no es posible determinar si es laminar o turbulento.

Flujo turbulento: $Re \geq 4000$

La integración de la ecuación para una densidad constante da como resultado la ecuación de Bernoulli, cada uno de los términos puede interpretarse como una forma de energía disponible. En la ecuación no se toman en cuenta las pérdidas de energía y es para un líquido ideal.

$$Z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} \quad 2.2. 6$$

Esta ecuación muestra que lo importante es la diferencia en energía potencial de flujo y cinética. Por consiguiente $Z_1 - Z_2$ es independiente del nivel de referencia particular, al igual que la diferencia en la elevación de los dos puntos. Similarmente, $\frac{P_1}{\gamma} - \frac{P_2}{\gamma}$ es la diferencia en las cargas de presión, expresada en unidades de longitud del fluido fluyendo, y no se altera por la presión de referencia particular seleccionada. Debido a que los términos de velocidad son no lineales, su nivel de referencia es fijo.

Las pérdidas de carga por longitud se deben al simple paso del flujo a lo largo de la tubería y es una pérdida que se da gradualmente a lo largo de la tubería.

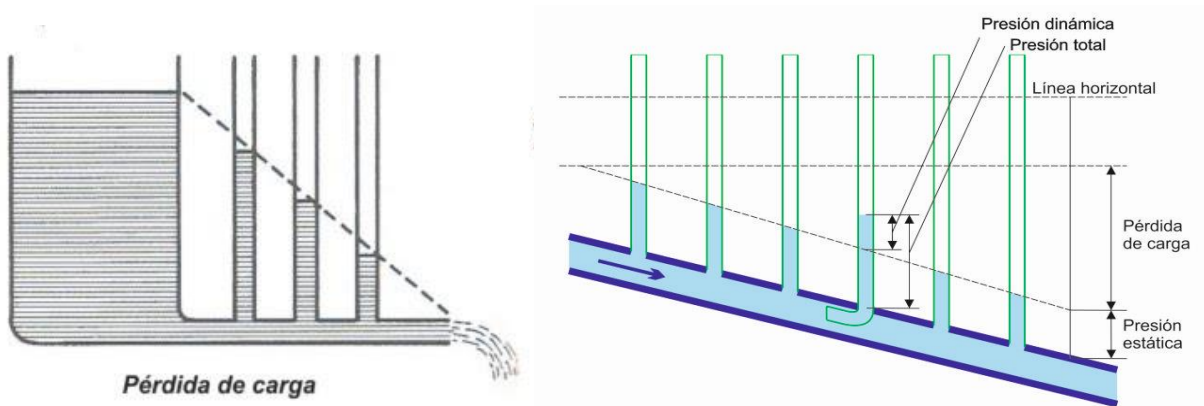


Ilustración 2: Pérdidas de cargas por longitud (Extraído de la fuente: <https://dtingenieria.wordpress.com/2014/11/26/bernoulli-la-presion-en-las-tuberias-y-la-perdida-de-carga-iii/>)

Las pérdidas de carga locales se deben al paso del flujo a través de accesorios instalados en las tuberías como válvulas, codos, contracciones, ensanchamiento de los conductos, etc. Las pérdidas locales o por accesorios son pérdidas abruptas ya que las producen los torbellinos que se forman por y en el accesorio.

Sotelo, (1998), muestra la ecuación para determinar el coeficiente f en flujo turbulento es:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left(\frac{\varepsilon}{3.7 D} + \frac{2.51}{Re \sqrt{f}} \right) \quad 2.2.7$$

La ecuación es conocida como fórmula de Colebrook-White y fue presentada en 1938. Donde ε = rugosidad absoluta (m), y al dividirse entre el diámetro interno del conducto se le identifica como rugosidad relativa (ε/D). Las pérdidas locales se determinan mediante la ecuación siguiente:

$$h_{loc} = K_{loc} \left(\frac{v^2}{2g} \right) = K_{loc} \left(\frac{8Q^2}{\pi^2 D^4 g} \right) \quad 2.2.8$$

K_{loc} = coeficiente adimensional (adimensional). Este coeficiente generalmente está en función de la geometría espacial y del tamaño del accesorio en flujo turbulento (Nekrasov, 1996; Shames, 1995; Streeter, 2000; Walski, 2003).

Mott (2006), cita que una expresión totalmente empírica, para determinar la pérdida de carga por fricción, es la ecuación de Hazen-Williams:

$$h_f = \frac{10.61}{D^{4.87}} \left(\frac{Q}{C} \right)^{1.852} L \quad 2.2.9$$

C es el coeficiente de Hazen-Williams y depende prácticamente del material de la tubería, y si es de fierro o acero depende del tiempo de uso (si es tubería nueva, seminueva o vieja).

King *et al.* (1948), citan que las pérdidas menores pueden despreciarse si la longitud de la tubería es mayor de 1000 veces el diámetro:

$$\sum_{j=1}^m h_{locj} = 0 \tag{2.2.10}$$

Skousen (2004), define las válvulas como dispositivos mecánicos diseñados específicamente para dirigir, iniciar, detener o para regular el caudal, la presión de los líquidos o gases. Las válvulas pueden ser de acero, fierro, latón, bronce, plástico o con cierto número especial de aleaciones.

Un líquido real si existe en la naturaleza y al momento de fluir posee esfuerzos cortantes en su interior y en su frontera que está entre el líquido y la pared del conducto, lo que significa que tiene viscosidad y por lo tanto existe una pérdida de energía. Al momento en que un líquido fluye nacen los esfuerzos cortantes en su interior y esto implica que también nace la viscosidad dinámica o absoluta (Garza-Vara, 2012).

El flujo en un conducto a presión significa que el fluido está forzado o presionado, ya sea con una presión relativa positiva o negativa y por ser un líquido real al pasar por la longitud de la tubería o por un accesorio se pierde energía, que en nuestro caso es una pérdida de energía específica (EE) o comúnmente conocida como pérdida de carga.

$$EE = \frac{\text{Energía del flujo}}{\text{Peso del fluido}} \tag{2.2.11} \longrightarrow \frac{FL}{F} = L (\text{Carga})$$

Corrección de la Ecuación de Continuidad para un Líquido Real

$$Q = \bar{V}_1 A_1 = \bar{V}_2 A_2 \quad 2.2. 12$$

$$Z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{\bar{V}_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{\bar{V}_2^2}{2g} + h_{f_{1-2}} \quad 2.2. 13$$

Uno de los métodos más utilizados para evaluar el factor de fricción emplea el diagrama de Moody que se presenta en la ilustración 3. El diagrama muestra la gráfica del factor de fricción f versus el número de Reynolds N_R , con una serie de curvas paramétricas relacionadas con la rugosidad relativa D/ε . Estas curvas las generó L.F. Moody a partir de datos experimentales.

Se grafica en escalas logarítmicas tanto a f como a N_R , debido al rango tan amplio de valores que se obtiene. A la izquierda de la gráfica, para números de Reynolds menores de 2000, la línea recta muestra la relación $f=64/N_R$ para el flujo laminar. Para $2000 < N_R < 4000$ no hay curvas, debido a que ésta es la zona crítica entre el flujo laminar y turbulento. Más allá de $Re = 4000$, se grafica la familia de curvas para distintos valores D/ε (Garza-Vara. 2012).

Formulas del diagrama de Moody por zonas:

Zona laminar ($0 < Re < 2000$), se utiliza la fórmula de Hagen-Poiseuille:

$$f = \frac{64}{Re} \quad 2.2. 14$$

Zona turbulenta en tubos lisos; $Re > 4000$ y $Re \leq 1.56 \left(\frac{D^8}{\varepsilon} \right)$, para no caer arriba

de esta zona: (Fórmula de Garza Vara, 1987), se utiliza la fórmula de Konakov.

$$f = \frac{1}{(1.8 \log(Re) - 1.5)^2} \quad 2.2. 15$$

Zona turbulenta en tubos rugosos, zona de transición;

$Re > 4000$ y $1.56 \left(\frac{D^8}{\varepsilon} \right) < Re < \left(\frac{191}{\sqrt{f}} \right) \left(\frac{D}{\varepsilon} \right)$, se utiliza la fórmula de Swamee-Jain.

$$f = \frac{0.25}{\left(\log \left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{5.74}{(Re)^{0.9}} \right) \right)^2} \quad 2.2. 16$$

Zona turbulenta en tubos rugosos; zona de turbulencia completa o zona

cuadrática; $Re \geq \left(\frac{191}{\sqrt{f}} \right) \left(\frac{D}{\varepsilon} \right)$, se utiliza la fórmula de Nikuradse.

$$f = \frac{1}{(1.74 + 2 \log(D/2\varepsilon))^2} \quad 2.2. 17$$

Zona crítica; $2000 \leq Re \leq 4000$:

$$f = \textit{indeterminada}$$

La fórmula de Colebrook-White para todo el flujo turbulento (tubos lisos y rugosos), se utiliza la fórmula en tubos comerciales.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3.71} + \frac{2.51}{Re\sqrt{f}} \right)$$

2.2. 18

2.3 Bombas

La primera bomba de agua se le atribuye a Arquímedes que la describió en el siglo III a.C. y se le conoce como “Tornillo de Arquímedes”, pero este sistema ya había sido utilizado anteriormente por Senaquerib, re de Asiria, en el siglo VII a.C.

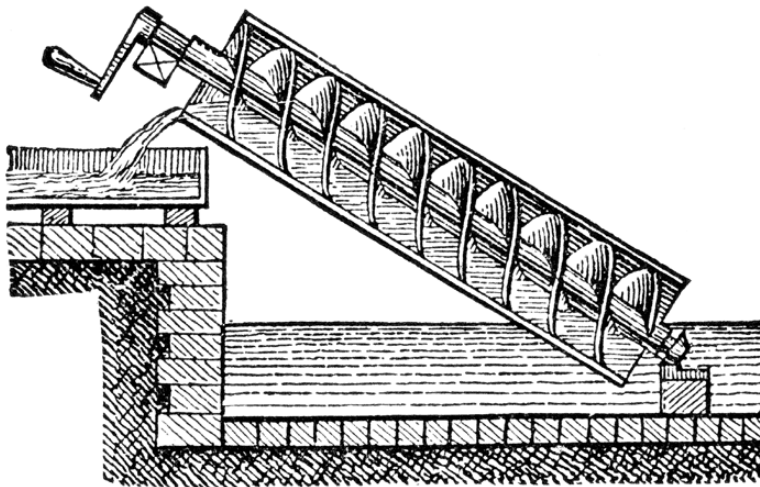


Ilustración 3: Tornillo de Arquímedes (Fuente extraída de. <https://cafeytech.substack.com/p/el-tornillo-de-arquimedes>)

Las primeras bombas de las que se tiene conocimiento son las ruedas persas. Este dispositivo era una rueda que parte de ella estaba bajo una corriente de agua, el cual tenía cubetas que al sumergirse se llenaban de este vital líquido y posteriormente se iban vaciando a un colector en el momento en que la cubeta se encontraba en su punto más alto. Pero la más conocida de aquellas bombas es el tornillo de Arquímedes que aún persiste en la actualidad. En el desarrollo tecnológico a través del tiempo, tomando en cuenta otras formas de energía, la bomba queda probablemente como la segunda máquina de uso más común, superado apenas por el motor eléctrico.



Ilustración 4: Rueda de persa en Armadillo de los Infante, San Luis Potosí, México.

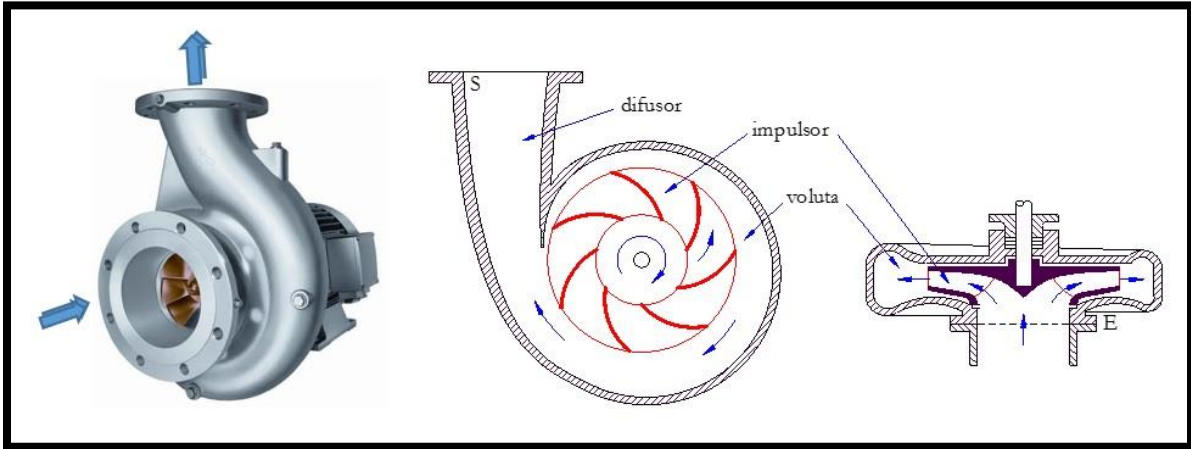


Ilustración 5: Bomba centrifuga tipo voluta (Fuente extraída de: <https://www.iagua.es/blogs/miguel-angel-monge-redondo/algunas-observaciones-instalaciones-equipos-bombeo>)

Las bombas centrifugas, también llamadas generadoras, se usan para mover el fluido en contra de la presión, para que un fluido se mueva desde donde hay más presión hacia donde hay menos presión.

La voluta tiene forma de caracol, es una parte fija que tiene como misión recoger el líquido que deja el rodete, cambia la dirección del movimiento y lo dirige hacia la salida, la voluta la podemos considerar un transformador de energía porque frena el líquido transformando la energía dinámica en energía de presión. Las bombas centrifugas se caracterizan por ser silenciosas.



Ilustración 6: Bomba sumergible Altamira (Fuente extraída de: <https://mortonpumps.com/bombas-altamira/>)

Como su nombre lo indica, una bomba sumergible está diseñada para trabajar con todo el conjunto, que consiste en bomba y motor, completamente sumergidos en el líquido. Este tipo de bomba tiene un motor herméticamente sellado que está estrechamente acoplado al cuerpo de la bomba. La carcasa alrededor del motor generalmente está llena con aceite para protegerlo de daños al evitar la entrada de cualquier líquido que pueda causar un cortocircuito.

Cuando la bomba esta sumergida hay presión positiva del fluido en la entrada de la bomba, esta condición crea una mayor eficiencia debido a la menor energía requerida para mover el fluido a través de la trayectoria del líquido de la bomba.

Karassik *et al.* (2008), señala que, si existe una bomba entre esos puntos, la ecuación de Bernoulli se convierte en una nueva expresión:

$$Z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + CDT = Z_N + \frac{P_N}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + h_{tot_{1-2}} \quad 2.3.1$$

CDT O H_b es el trabajo neto realizado por la bomba por la unidad de peso de fluido bombeado o carga total que la bomba agrega al agua que es conocida como carga dinámica total en metros de columna de agua.

$$H_b = CF + CV \quad 2.3.2$$

Al termino CF se le nombra cargas fijas y a CV se le conoce como cargas variables. Las cargas variables son función del caudal y las cargas fijas son constantes e independientes del caudal, y corresponde a la altura que la bomba eleva el agua, desde la fuente de abastecimiento hasta el final de la tubería de descarga en el caso de descarga libre. Si la bomba descarga el agua, abajo del nivel de la fuente de abastecimiento, las cargas fijas son negativas. Las cargas fijas y variables se determinan de la manera siguiente:

$$CF = \left(Z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} \right) - \left(Z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} \right) \quad 2.3.3$$

$$CV = h_{tot_{1-2}} \quad 2.3.4$$

Las cargas variables se determinan de la manera siguiente, para bombas centrífugas tipo voluta (ilustración 5) y sumergibles (ilustración 6) respectivamente:

$$CV = h_{tot_s} + h_{tot_d} \quad 2.3.5$$

$$CV = h_{tot_{cb}} + h_{tot_d} \quad 2.3.6$$

La gráfica de la ecuación de Bernoulli con carga dinámica total se identifica como la curva característica de la tubería. Las ecuaciones de Darcy Weisbach y pérdidas

locales en función del caudal, en tuberías de succión o columna de bombeo y tubería de descarga, en conductos cortos:

$$h_{tot_s} = \left[\left(f_s \frac{L_s}{D_s} + \left(\sum_{j=1}^m K_{loc_j} \right)_s \right) \frac{8}{\pi^2 D_s^4 2g} \right] Q^2 \quad 2.3.7$$

$$h_{tot_d} = \left[\left(f_s \frac{L_d}{D_d} + \left(\sum_{j=1}^m K_{loc_j} \right)_d \right) \frac{8}{\pi^2 D_d^4 2g} \right] Q^2 \quad 2.3.8$$

$$h_{tot_{cb}} = \left[\left(f_s \frac{L_{cb}}{D_{cb}} + \left(\sum_{j=1}^m K_{loc_j} \right)_{cb} \right) \frac{8}{\pi^2 D_{cb}^4 2g} \right] Q^2 \quad 2.3.9$$

En el caso de tuberías largas, las pérdidas menores se desprecian y las ecuaciones, se convierten en las expresiones siguientes:

$$h_{f_s} = \left[\frac{8f_s L_s}{\pi^2 D_s^5 g} \right] Q^2 \quad 2.3.10$$

$$h_{f_d} = \left[\frac{8f_d L_d}{\pi^2 D_d^5 g} \right] Q^2 \quad 2.3.11$$

$$h_{f_{cb}} = \left[\frac{8f_{cb} L_{cb}}{\pi^2 D_{cb}^5 g} \right] Q^2 \quad 2.3.12$$

Por lo tanto, en tuberías largas las cargas variables tienen la ecuación:

$$CV = h_{f_s} + h_{f_d} = \left[\left(f_s \frac{L_s}{D_s^5} + f_d \frac{L_d}{D_d^5} \right) \frac{8}{\pi^2 g} \right] Q^2 \quad 2.3.13$$

$$CV = h_{f_{cb}} + h_{f_d} = \left[\left(f_{cb} \frac{L_{cb}}{D_{cb}^5} + f_d \frac{L_d}{D_d^5} \right) \frac{8}{\pi^2 g} \right] Q^2 \quad 2.3.14$$

La potencia del conjunto motor-bomba y el agua impulsada se clasifican en tres categorías: potencia del agua, que es la potencia del flujo a la salida de la bomba (WPH), potencia de la bomba (BHP) mejor conocida como potencia al freno (break horse power)

que es la que se representa en las curvas características de las bombas. Por último, la potencia del motor (MHP). Sus ecuaciones en el SI son las siguientes:

$$WHP = \frac{Q\gamma Hb}{76} \quad 2.3. 15$$

$$BHP = \frac{WHP}{Eff_b} = \frac{Q\gamma Hb}{76Eff_b} \quad 2.3. 16$$

$$MHP = \frac{BHP}{Eff_m} = \frac{Q\gamma Hb}{76Eff_b Eff_m} = \frac{Q\gamma Hb}{76Eff_g} \quad 2.3. 17$$

γ = peso específico del agua (Kg_f/m^3); Eff_b = eficiencia de la bomba; Eff_m = eficiencia del motor; Eff_g = eficiencia global que se obtiene al multiplicar la eficiencia de la bomba por la eficiencia del motor (las eficiencias están en fracción por ciento).

El número 76 corrige las unidades en caballos de fuerza (AWWA, 2010).

Mott (2006) y Mataix (1982), mencionan que las leyes de afinidad de las bombas centrífugas son relaciones matemáticas que se utilizan para poder predecir el funcionamiento de las bombas, cuando cambian las características de las mismas. Estas características son el caudal, su carga, la potencia al freno, con respecto a la velocidad del giro del impulsor. Por lo tanto, existen dos leyes: la primera ley de afinidad se aplica cuando la velocidad de giro del impulsor varía, manteniendo constante el diámetro del impulsor, siendo las ecuaciones las siguientes expresiones:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad 2.3. 18$$

$$\frac{Hb_1}{Hb_2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \quad 2.3. 19$$

$$\frac{BHP_1}{BHP_2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^3 \quad 2.3. 20$$

Los subíndices 1 y 2 significan antes y después de la variación y el símbolo N se refiere a la velocidad de rotación del impulsor, en revoluciones por minuto. La segunda ley de afinidad se aplica cuando varía el diámetro del impulsor, manteniendo constante la velocidad de giro del impulsor, sus expresiones matemáticas se muestran a continuación:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{D_1}{D_2} \quad 2.3. 21$$

$$\frac{Hb_1}{Hb_2} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 \quad 2.3. 22$$

$$\frac{BHP_1}{BHP_2} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^3 \quad 2.3. 23$$

2.4 Programas comerciales para el diseño de redes

Saldarriaga (2008), cita que existen algunos programas comerciales y otros que fueron generados en las universidades para modelar la distribución del agua en redes.

Se utilizó el programa de Visual Basic 6.0, para determinar el coeficiente fricción utilizando ciertos parámetros requeridos conocidos para la obtención de dicho resultado. Es un lenguaje de programación dirigido por eventos, desarrollado por Alan Cooper (1992) para Microsoft.

Microsoft Excel (1985) es un programa que permite editar hojas de cálculo desarrollada por Microsoft para Windows, MacOS, Android e iOS. Cuenta con cálculos, gráficas, tablas calculares y un lenguaje de programación macro llamado Visual Basic para aplicaciones.

3. Materiales y métodos

3.1 Desarrollo de las matrices Jacobianas para la solución de redes abiertas

El desarrollo del modelo matemático en redes abiertas comprende las etapas siguientes:

Primero; ubicación del nivel de referencia. Es el nivel para poder medir los cambios de energía del flujo en la red. Se puede ubicar, en cualquier parte, pero se recomienda situarlo en el nivel más bajo, ya sea que corresponda a un nivel dinámico de un acuífero en el caso de bomba sumergible o en el nivel de la superficie libre de la fuente de abastecimiento (depósito, lago, río, etc.), en el caso de bomba centrífuga.

Segundo; ubicación de los puntos principales o estratégicos para medir las cargas en la red:

- Superficies de las fuentes de abastecimiento que abastecen a la red (puntos iniciales de la red).
- Salidas de las bombas.
- Nodos.
- Entradas a los sistemas de riego (puntos finales de la red).

Tercero; identificación de los tipos de líneas que conforman la red:

- Línea con bomba: Son líneas que tienen una bomba. Cada línea con bomba está conformada por dos tramos. En el caso de bombas sumergibles en pozos profundos, el primer es la columna de bomba, y el segundo tramo es la tubería de descarga. En una bomba centrífuga tipo voluta de eje horizontal, el primer tramo

es la tubería de succión y la tubería de descarga la que esta después de a la bomba para conectar al nodo.

- Líneas sin bomba: Es la línea que va de un nodo y conecta al sistema de riego o a un depósito.

3.1.1 Desarrollo por el método de Newton-Raphson

Este método se caracteriza por resolver ecuaciones no lineales, es un sistema numérico para encontrar la raíz o raíces de ecuaciones que se igualan a cero, que en nuestro caso estas son formulas cuadráticas hidráulicas de una sola variable que no pueden despejarse.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad 3.3.1.1$$

La ecuación anterior es una fórmula iterativa para una sola ecuación.

Spiegel (2001) y Stewart (2002), citan que los métodos matemáticos para resolver ecuaciones no lineales, se inician con la Serie de Taylor en torno al punto a:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{(n-1)} + \dots \quad 3.3.1.2$$

Si $a = 0$, la Serie de Taylor se transforma en la Serie de Maclaurin:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x^2) + \frac{f'''(0)}{3!}(x^3) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}(x^{(n-1)}) + \dots \quad 3.3.1.3$$

Burden y Faires (1985), señalan que el método de Newton – Raphson resuelve una sola ecuación no lineal e igual a cero, se puede deducir de la serie de Taylor, considerando tan solo sus dos primeros términos y al hacer la sustitución: $x = x_{i+1}$ y $a =$

x_1 en la ecuación de Maclaurin, hasta que $f(x_{i+1}) = 0$ y posteriormente se despeja x_{i+1} , tal como se muestra a continuación:

$$f(x) \cong f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) = f(a) + f'(a)(x - a) \quad 3.3.1.4$$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) \quad 3.3.1.5$$

Al despejar x_{i+1} :

$$x_{i+1} = x_i + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{f'(x_i)} \quad 3.3.1.6$$

Si $f(x_{i+1}) = 0$, por ser la raíz

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}; \quad f'(x_i) \neq 0 \quad 3.3.1.7$$

donde:

$f(x_i)$ = función de x en el punto x_i

$f'(x_i)$ = derivada de la función de x en el punto x_i

x_{i+1} = punto donde se intercepta la tangente de la curva en el eje x

La ecuación de Newton - Raphson realiza un cálculo iterativo de esta manera:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \rightarrow x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \rightarrow \dots \rightarrow x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \rightarrow \dots \quad 3.3.1.8$$

hasta que $x_{i+1} \cong x_i$ ó $\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \cong 0$.

x_0 es el valor inicial, el cual se supone.

Para el caso de dos ecuaciones no lineales ($f_1(x)$ y $f_2(x)$):

$$f_1(x^i) = (x_1^i - x_1^{i+1}) \frac{\partial f_1(x^i)}{\partial x_1} + (x_1^i - x_1^{i+1}) \frac{\partial f_1(x^i)}{\partial x_2}$$

$$f_2(x^i) = (x_2^i - x_2^{i+1}) \frac{\partial f_2(x^i)}{\partial x_1} + (x_2^i - x_2^{i+1}) \frac{\partial f_2(x^i)}{\partial x_2}$$

$$f_1(x^i) = x_1^i \frac{\partial f_1(x^i)}{\partial x_1} + x_1^i \frac{\partial f_1(x^i)}{\partial x_2} - x_1^{i+1} \frac{\partial f_1(x^i)}{\partial x_1} - x_1^{i+1} \frac{\partial f_1(x^i)}{\partial x_2}$$

$$f_2(x^i) = x_2^i \frac{\partial f_2(x^i)}{\partial x_1} + x_2^i \frac{\partial f_2(x^i)}{\partial x_2} - x_2^{i+1} \frac{\partial f_2(x^i)}{\partial x_1} - x_2^{i+1} \frac{\partial f_2(x^i)}{\partial x_2}$$

$$\begin{bmatrix} f_1(x^i) \\ f_2(x^i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x^i)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x^i)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x^i)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x^i)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^i \\ x_2^i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x^i)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x^i)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x^i)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x^i)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{i+1} \\ x_2^{i+1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_1(x^i) \\ f_2(x^i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x^i)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x^i)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x^i)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x^i)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} x_1^i \\ x_2^i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1^{i+1} \\ x_2^{i+1} \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{i+1} \\ x_2^{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^i \\ x_2^i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x^i)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x^i)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x^i)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x^i)}{\partial x_2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_1(x^i) \\ f_2(x^i) \end{bmatrix} \quad 3.3.1.9$$

La matriz cuyos elementos son derivadas parciales de las funciones, se conoce como matriz Jacobiana. Para un sistema de N ecuaciones no lineales con N incógnitas, el método de *Newton – Raphson* usa las iteraciones recurrentes.

$$X^{(i+1)} = X^{(i)} - J^{-1}F(X^{(i)}) \quad 3.3.1.10$$

siendo J^{-1} la inversa de la matriz *Jacobiana* y el número de iteración está dado en el superíndice i .

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x^i)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x^i)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x^i)}{\partial x_N} \\ \frac{\partial f_2(x^i)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x^i)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x^i)}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_N(x^i)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_N(x^i)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_N(x^i)}{\partial x_N} \end{bmatrix}$$

$$F(X^{(i)}) = \begin{bmatrix} f_1(x^i) \\ f_2(x^i) \\ \vdots \\ f_N(x^i) \end{bmatrix}$$

$$X^{(i)} = \begin{bmatrix} x_1^i \\ x_2^i \\ \vdots \\ x_N^i \end{bmatrix} \quad X^{(i+1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(i+1)} \\ x_2^{(i+1)} \\ \vdots \\ x_N^{(i+1)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(i+1)} \\ x_2^{(i+1)} \\ \vdots \\ x_N^{(i+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^i \\ x_2^i \\ \vdots \\ x_N^i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x^i)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x^i)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x^i)}{\partial x_N} \\ \frac{\partial f_2(x^i)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x^i)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x^i)}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_N(x^i)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_N(x^i)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_N(x^i)}{\partial x_N} \end{bmatrix}^{-1}$$

Se tienen J ecuaciones ($j = 1, 2, 3, \dots, n_e$), donde n_e es el número total de ecuaciones.

Se tienen i iteraciones ($i = 1, 2, 3, \dots, n_i$), donde n_i es el número total de iteraciones para obtener el resultado.

$$x_j^{i+1} = x_j^i - f'(x_j^i)^{-1} f(x_j^i)$$

3.3.1. 11

El método de resolver ecuaciones no lineales de Newton – Raphson no está garantizado, pues a veces resulta que no es convergente (Gómez - García,2009).

Para el uso del método de matrices Jacobianas, primeramente, se hace una selección de la bomba o bombas que cumplen con los requisitos en cuestión de gasto y carga que el sistema requiere. Una vez seleccionada la bomba se grafica su curva característica de carga contra descarga, con los datos de H_B (metros) y gasto Q (m^3/s) en una hoja de Excel genera una línea de tendencia polinómica de grado 2, al seleccionar presenta la ecuación en el gráfico y presenta el valor de R cuadrado.

Al generar estos datos, si en la ecuación de la gráfica la R^2 da como resultado un 0.99 o 0.985 indica que la bomba es óptima de acuerdo a los criterios requeridos.

La ecuación obtenida es del tipo $AQ^n + BQ + C$ que es la carga dinámica total de la bomba (CDT), la cual se integra en las ecuaciones de las líneas de conducción que tienen bomba, que se deriva de la Ecuación de Bernoulli (ecuación 2.2.13) tal como en el método grafo analítico, de manera que todas las ecuaciones se deben igualar a 0.

Además, del número total de ecuaciones generadas de H_N se escoge una para usarla como tal.

Líneas con bomba:

$$Z_j - H_n + CDT_i - hf_i = 0$$

Líneas sin bomba:

$$Z_j - H_n + \frac{P_{sr}}{\gamma} - h_{fi} = 0$$

donde:

j: letra que identifica a los depósitos.

j= A, B, C.....

n: número que identifica a la carga en los nodos

n=1,2,3.....

sr: número que identifica la presión a la entrada de cada sistema de riego.

sr=1,2,3.....

i: número que identifica a cualquier línea de la red y bomba.

i=1,2,3.....

3.2 Desarrollo del nuevo método grafo analítico para la solución de redes abiertas

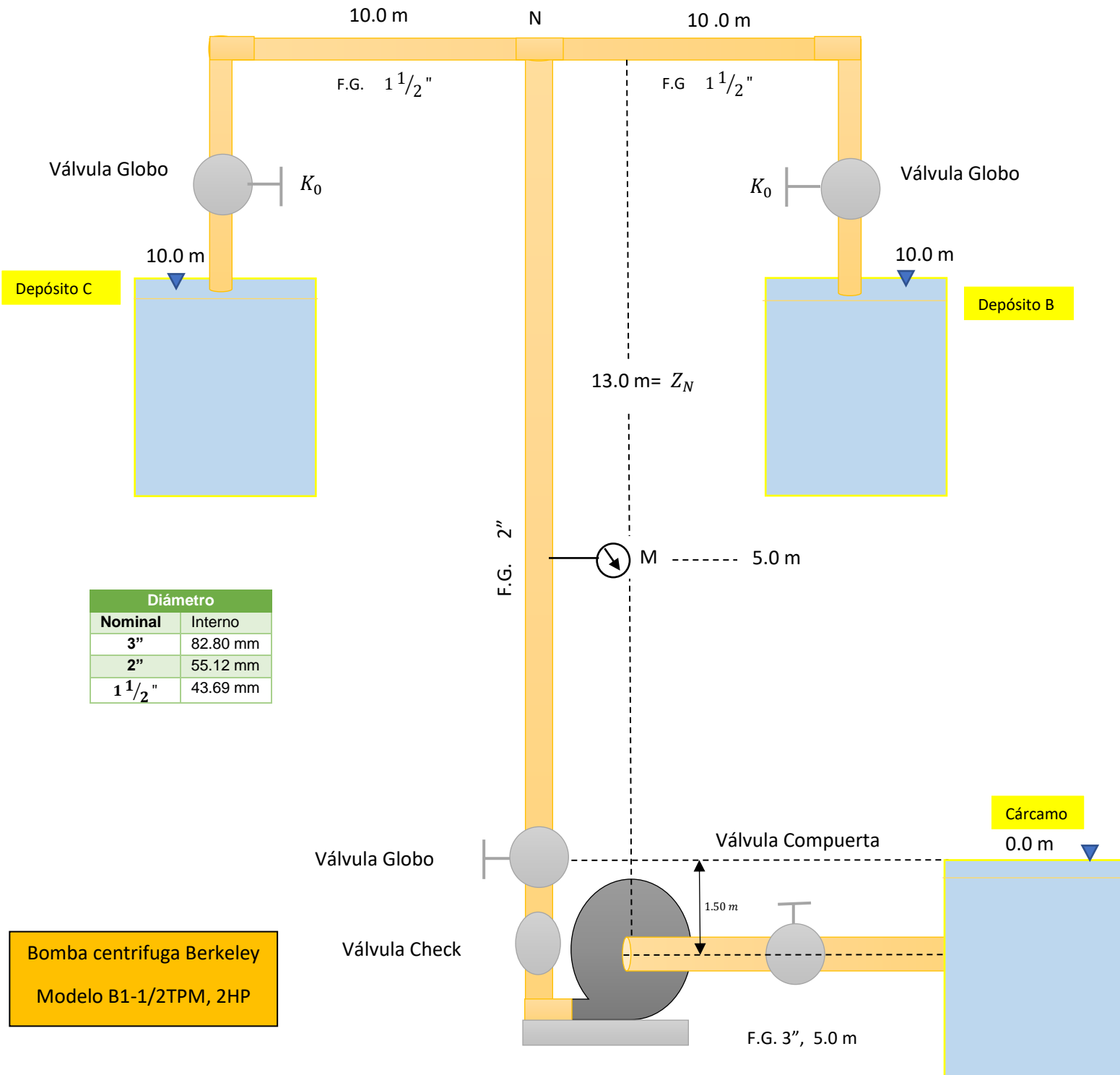
El método grafo analítico propuesto se basa en la realización de curvas características de las líneas de conducción, las cuales se grafican con diferentes caudales que circulan por la tubería tomando en cuenta sus pérdidas de carga al aplicar la ecuación de Bernoulli y la ecuación de Darcy-Weisbach. Las curvas características de las líneas de conducción se suman en serie y en paralelo según como estén dispuestas en la red de distribución de agua.

La solución del sistema se encuentra en el punto donde se cruzan las curvas que surgen al sumar las líneas de alimentación en paralelo con las líneas de descarga en paralelo y posteriormente se dibuja una línea horizontal que debe pasar por el punto de cruce y a la vez cruza por cada línea individual de la red para determinar los caudales de cada una de ellas (Mata, 2008).

4. Resultados y discusión

4.1 Comparación de los resultados grafo-analíticas con las matrices jacobianas

Problema de redes abiertas número uno



Formulas utilizadas:

Se aplica la ecuación de Bernoulli del punto A-N:

$$Z_A + \frac{P_A}{\delta} + \frac{\bar{V}_A^2}{2g} + CDT = \underbrace{Z_N + \frac{P_N}{\delta}}_{H_N} + \frac{\bar{V}_d^2}{2g} + hf_{Tot_s} + hf_{Tot_d}$$

$$Z_A + CDT = H_N + \frac{\bar{V}_d^2}{2g} + hf_{Tot_s} + hf_{Tot_d}$$

$$H_N = Z_A + CDT - \frac{\bar{V}_d^2}{2g} - hf_{Tot_s} - hf_{Tot_d}$$

Se aplica la Ecuación de Bernoulli del punto N-B:

$$Z_N + \frac{P_N}{\delta} + \frac{\bar{V}_2^2}{2g} = Z_B + \frac{P_B}{\delta} + \frac{\bar{V}_B^2}{2g} + hf_{Tot_2}$$

$$H_N + \frac{\bar{V}_2^2}{2g} = Z_B + hf_{Tot_2}$$

$$H_N = Z_B + hf_{Tot_2} - \frac{\bar{V}_2^2}{2g}$$

Se aplica la Ecuación de Bernoulli del punto N-C:

$$Z_N + \frac{P_N}{\delta} + \frac{\bar{V}_2^2}{2g} = Z_C + \frac{P_C}{\delta} + \frac{\bar{V}_C^2}{2g} + hf_{Tot_3}$$

$$H_N + \frac{\bar{V}_2^2}{2g} = Z_C + hf_{Tot_3}$$

$$H_N = Z_C + hf_{Tot_3} - \frac{\bar{V}_3^2}{2g}$$

Se derivan las fórmulas de H_N para el punto 2 y 3, incluyendo los coeficientes (K) de los accesorios, de tal forma que la ecuación queda de la siguiente forma:

$$H_N = Z_B + hf_{Tot_2} - \frac{\bar{V}_2^2}{2g}$$

$$H_N = Z_B + hf_s + \left(\sum_{j=1}^{m=4} h_{loc_j} \right) - \frac{\bar{V}_2^2}{2g}$$

m= 4 es el número total de accesorios en la tubería del punto B-N, la cual se desglosa de la siguiente manera:

$$H_N = Z_B + hf_s + h_{loc_1} + h_{loc_2} + h_{loc_3} + h_{loc_4}$$

Al tener la ecuación se especifican los accesorios que hay:

$$H_N = Z_B + hf_s + h_{red} + h_{codo\ 90^\circ} + h_{valv.globo} + h_{salida}$$

Después se multiplica por $\frac{\bar{V}_2^2}{2g}$:

$$H_N = Z_B + f \frac{L \bar{V}_2^2}{D 2g} + K_{red} \frac{\bar{V}_2^2}{2g} + K_{codo\ 90^\circ} \frac{\bar{V}_2^2}{2g} + K_{valv.globo} \frac{\bar{V}_2^2}{2g} + K_{salida} \frac{\bar{V}_2^2}{2g}$$

Factorizar la ecuación:

$$H_N = Z_B + \left(f \frac{L}{D} + K_{red} + K_{codo\ 90^\circ} + K_{valv.globo} + K_{salida} \right) \frac{\bar{V}_2^2}{2g}$$

$$\sum_{j=1}^{m=4} K_j = K_{red} + K_{codo\ 90^\circ} + K_{valv.globo} + K_{salida}$$

$$H_N = Z_B + \left(f \frac{L}{D} + \sum_{j=1}^{m=4} K_j \right) \frac{\bar{V}_2^2}{2g}$$

$$H_N = Z_C + \left(f \frac{L}{D} + \sum_{j=1}^{m=4} K_j \right) \frac{\bar{V}_2^2}{2g}$$

Se hace el mismo procedimiento para el punto A-N:

$$H_N = Z_A + CDT - \frac{\bar{V}_d^2}{2g} - hf_{Tot_s} - hf_{Tot_d}$$

$$H_N = Z_A + CDT - \frac{\bar{V}_d^2}{2g} - hf_s + \left(\sum_{j=1}^{m=4} h_{loc_j} \right)_s - hf_d + \left(\sum_{j=1}^{m=4} h_{loc_j} \right)_d$$

$$H_N = Z_A + CDT - \frac{\bar{V}_d^2}{2g} - hf_s + (h_{loc_1} + h_{loc_2} + h_{loc_3} + h_{loc_4})_S - hf_d + (h_{loc_1} + h_{loc_2} + h_{loc_3} + h_{loc_4})_d$$

$$H_N = Z_A + CDT - \frac{\bar{V}_d^2}{2g} - hf_s + (h_{pich} + h_{codo\ 90^\circ} + h_{valv.comp} + h_{red\ exc_{3-2}})_S - hf_d + (h_{red_{2-1^{1/2}}} + h_{valv\ check} + h_{valv\ globo} + h_{T90^\circ})_d$$

$$H_N = Z_A + CDT - \frac{\bar{V}_d^2}{2g} - \left(f_s \frac{L_s}{D_s} + k_{pich} + k_{codo\ 90^\circ} + k_{valv.comp} + k_{red\ exc_{3-2}} \right) \frac{\bar{V}_s^2}{2g} - \left(f_d \frac{L_d}{D_d} + k_{red_{2-1^{1/2}}} + k_{valv\ check} + k_{valv\ globo} + k_{T90^\circ} \right) \frac{\bar{V}_s^2}{2g}$$

$$\sum_{j=1}^{m=4} K_j = K_{pich} + K_{codo\ 90^\circ} + K_{valv.comp} + K_{red\ exc_{3-2}}$$

$$\sum_{j=1}^{m=4} K_j = K_{red_{2-1^{1/2}}} + K_{valv.check} + K_{valv.globo} + K_{T90^\circ}$$

$$H_N = Z_A + CDT - \frac{\bar{V}_d^2}{2g} - \left[f_s \frac{L_s}{D_s} + \left(\sum_{j=1}^{m=4} K_j \right)_S \right] \frac{\bar{V}_s^2}{2g} - \left[f_d \frac{L_d}{D_d} + \left(\sum_{j=1}^{m=4} K_j \right)_d \right] \frac{\bar{V}_d^2}{2g}$$

Se factoriza la ecuación con $\frac{\bar{V}_d^2}{2g}$:

$$H_N = Z_A + CDT - \left[f_s \frac{L_s}{D_s} + \left(\sum_{j=1}^{m=4} K_j \right)_s \right] \frac{\bar{V}_s^2}{2g} - \left[f_d \frac{L_d}{D_d} + \left(\sum_{j=1}^{m=4} K_j - 1 \right)_d \right] \frac{\bar{V}_d^2}{2g}$$

Al tener las ecuaciones de H_N de cada tubería se le incluyen los valores correspondientes:

$$H_N = Z_A + CDT - \left[f_s \frac{L_s}{D_s} + \left(\sum_{j=1}^{m=4} K_j \right)_s \right] \frac{\bar{V}_s^2}{2g} - \left[f_d \frac{L_d}{D_d} + \left(\sum_{j=1}^{m=4} K_j - 1 \right)_d \right] \frac{\bar{V}_d^2}{2g}$$

$$H_N = Z_A + CDT - \left[f_s \frac{L_s}{D_s} + \left(\sum_{j=1}^{m=4} K_j \right)_s \right] \frac{8Q^2}{\pi^2 D_s^4 g} - \left[f_d \frac{L_d}{D_d} + \left(\sum_{j=1}^{m=4} K_j - 1 \right)_d \right] \frac{8Q^2}{\pi^2 D_d^4 g}$$

Se factoriza $\frac{8Q^2}{\pi^2 g}$:

$$H_N = Z_A + CDT - \left\{ \left[f_s \frac{L_s}{D_s} + \left(\sum_{j=1}^{m=4} K_j \right)_s \right] \frac{1}{D_s^4} - \left[f_d \frac{L_d}{D_d} + \left(\sum_{j=1}^{m=4} K_j - 1 \right)_d \right] \frac{1}{D_d^4} \right\} \frac{8Q^2}{\pi^2 g}$$

$$H_N = Z_B + \left(f \frac{L}{D} + \sum_{j=1}^{m=4} K_j \right) \frac{\bar{V}_2^2}{2g}$$

$$H_N = Z_B + \left(f \frac{L}{D} + \sum_{j=1}^{m=4} K_j \right) \frac{8Q^2}{\pi^2 D_2^4 g}$$

$$H_N = Z_C + \left(f \frac{L}{D} + \sum_{j=1}^{m=4} K_j \right) \frac{\bar{V}_2^2}{2g}$$

$$H_N = Z_C + \left(f \frac{L}{D} + \sum_{j=1}^{m=4} K_j \right) \frac{8Q^2}{\pi^2 D_3^4 g}$$

De acuerdo al valor de cada coeficiente de accesorio se hace una sumatoria de coeficientes de cada tubería, dando como resultado lo siguiente:

$$\sum K_S = 13.99$$

$$\sum K_d = 6.64$$

$$\sum K_{2,y3} = 13.6$$

Se sustituyen los valores de K en cada ecuación de H_N :

Punto A-N:

$$H_N = Z_A + CDT - \left\{ \left[f_s \frac{L_s}{D_s} + \left(\sum_{j=1}^{m=4} K_j \right) \right] \frac{1}{D_s^4} - \left[f_d \frac{L_d}{D_d} + \left(\sum_{j=1}^{m=4} K_j - 1 \right) \right] \frac{1}{D_d^4} \right\} \frac{8Q^2}{\pi^2 g}$$

$$H_N = 1.5 + (AQ^n + BQ + C) - \left\{ \left[f_s \frac{5}{0.08280} + 13.99 \right] \frac{1}{0.08280^4} - \left[f_d \frac{13}{0.05512} + 6.64 - 1 \right] \frac{1}{0.05512^4} \right\} \frac{8(0.004)^2}{\pi^2 * 9.81}$$

$$H_N = 1.5 + (AQ^n + BQ + C) - \{ [f_s * 60.39 + 13.99] * 21275.45 - [f_d * 235.85 + 5.64] * 108333.60 \} * 0.0000013220$$

$$H_N = 1.5 + (AQ^n + BQ + C) - \{ [f_s * 60.39 + 13.99] * 0.02813 - [f_d * 235.85 + 5.64] * 0.14322 \}$$

Punto N-B y N-C:

$$H_N = Z_B + \left(f \frac{L}{D} + \sum_{j=1}^{m=4} K_j \right) \frac{8Q^2}{\pi^2 D^4 g}$$

$$H_N = 11.5 + \left(f \frac{10}{0.04369} + 13.6 \right) * \frac{8(0.002)^2}{\pi^2 * (0.04369)^4 * 9.81}$$

$$H_N = 11.5 + (f * 228.89 + 13.6) * 0.091$$

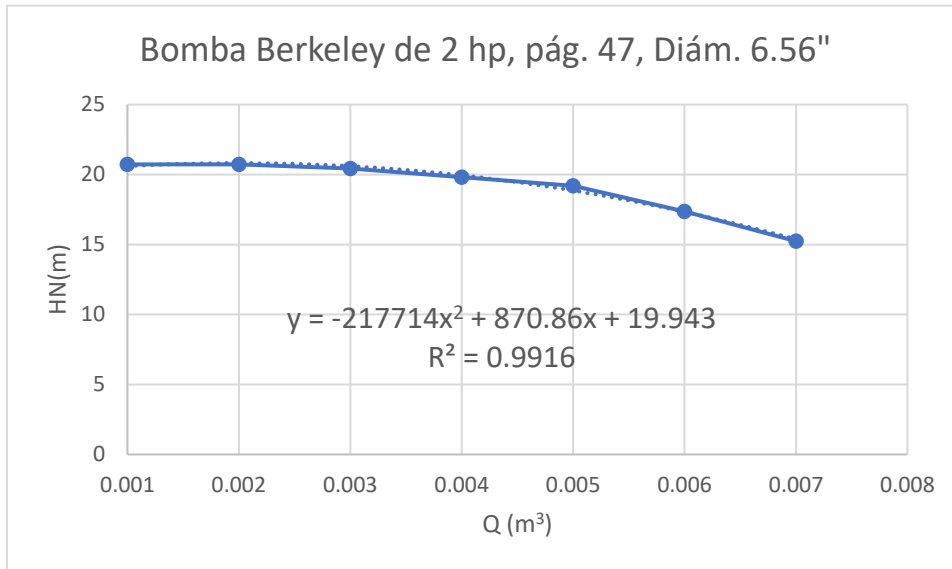
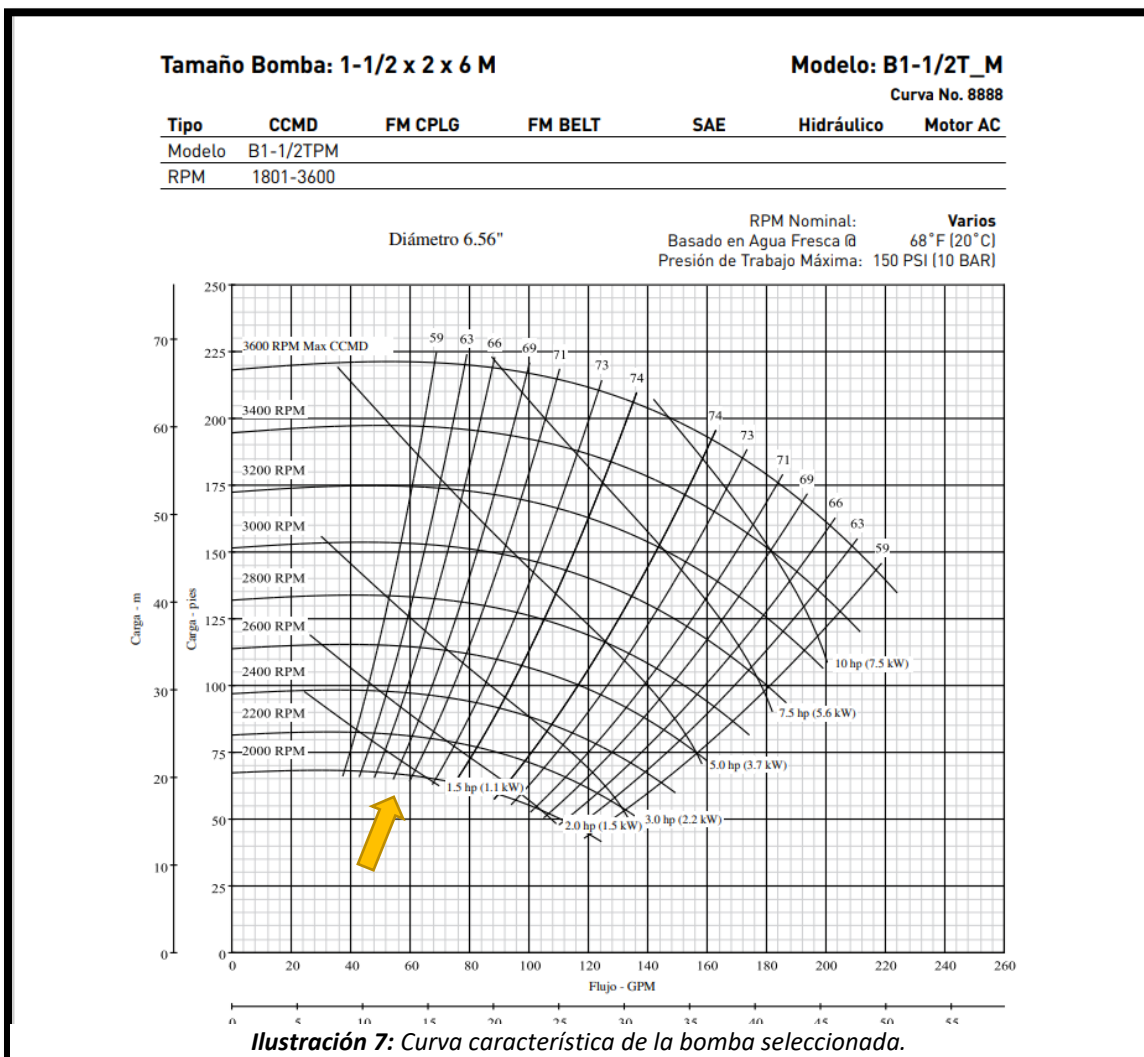


Tabla 1: Ecuación de la curva característica de la bomba.



$$H_N = 1.5 + (-217714Q_1^2 + 870.86Q_1 + 19.943) - \{[f_s * 60.39 + 13.99] * 0.02813 - [f_d * 235.85 + 5.64] * 0.14322\}$$

$$H_N = 11.5 + (f * 228.89 + 13.6) * 0.091$$

$$H_N = 11.5 + (f * 228.89 + 13.6) * 0.091$$

Como la gráfica de la curva de la bomba (ilustración 13) da un 99% de compatibilidad utilizamos la ecuación dada como $(AQ^2 + BQ + C)$, por lo tanto, se utilizan esos datos para graficar el método grafo analítico:

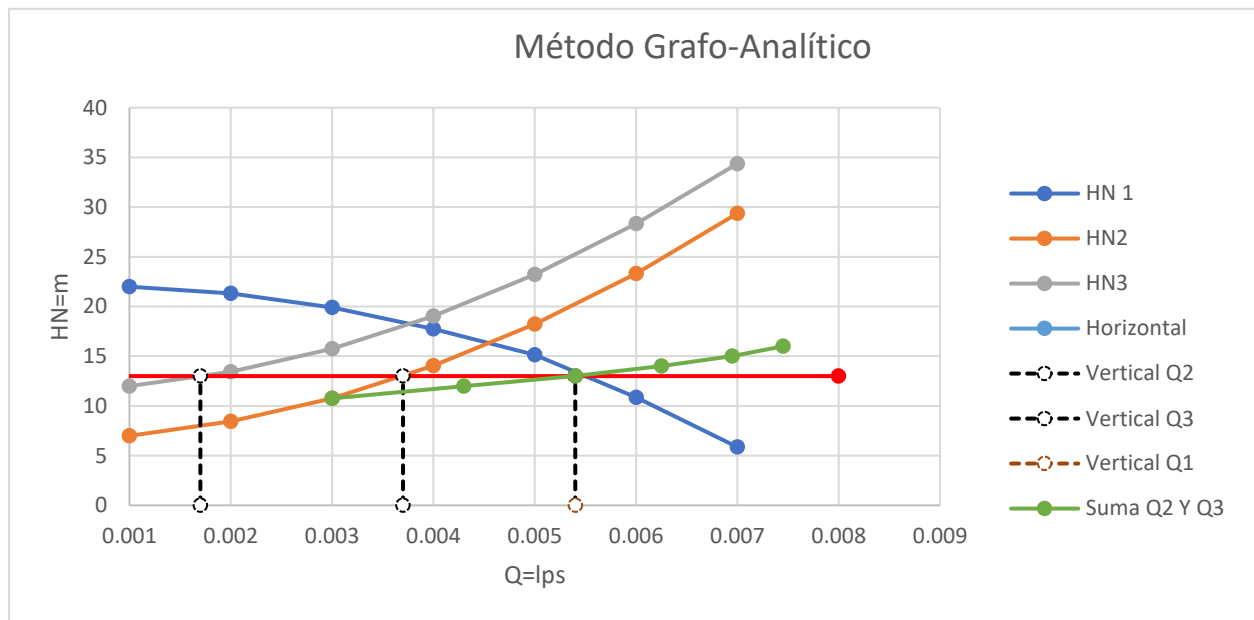


Tabla 2: Método grafo analítico del problema uno.

Tubería 1	
Q	HN
0.001	21.9942914
0.002	21.3161309
0.003	19.8934528
0.004	17.7418864
0.005	15.1320301
0.006	10.8678517
0.007	5.85984642

Tubería 2	
Q	HN
0.001	6.99236913
0.002	8.43210456
0.003	10.7631483
0.004	14.0415583
0.005	18.2252912
0.006	23.3283614
0.007	29.3671191

Tubería 3	
Q	HN
0.001	11.9923691
0.002	13.4321046
0.003	15.7631483
0.004	19.0415583
0.005	23.2252912
0.006	28.3283614
0.007	34.3671191

Suma Q2 Y Q3	
Q	HN
0.003	10.76
0.0043	12
0.0054	13
0.00625	14
0.00695	15
0.00745	16

Q	fs	fd	f2 y f3
0.001	0.031	0.031	0.0312
0.002	0.028	0.029	0.03
0.003	0.027	0.028	0.0288
0.004	0.026	0.027	0.0285
0.005	0.025	0.0269	0.0282
0.006	0.0249	0.0267	0.028
0.007	0.0247	0.02655	0.0279

Q_1	Q_1
(m ³ /s)	(lps)
0.0054	5.40
Q_2	Q_2
(m ³ /s)	(lps)
0.0037	3.70
Q_3	Q_3
(m ³ /s)	(lps)
0.0017	1.70

Formulas utilizadas en el método de matrices Jacobianas:

$$F_1 = [5190627f_3 + 249451.29]Q_3^2 + [106160.76f_5 + 2111154.67f_d + 307365.97]Q_1^2 - 870.86Q_1 - 6.94 = 0$$

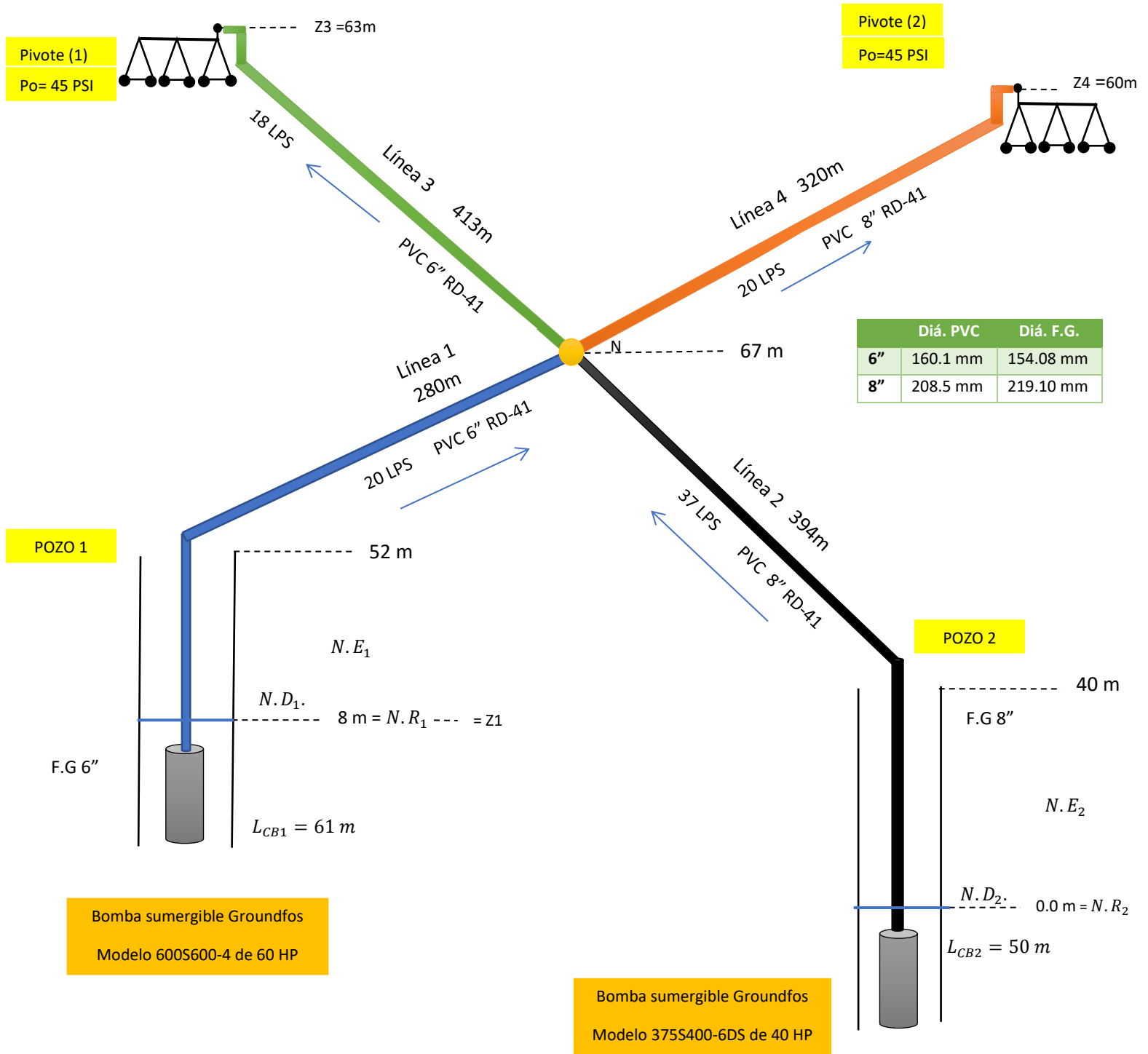
$$F_2 = [5190627.80f_3 + 249451.29]Q_3^2 + [7785828.31f_2 + 249451.29]Q_2^2 - 6.5 = 0$$

$$F_3 = Q_1 - Q_2 - Q_3 = 0$$

1° iteración											
Q1=	0.003		F1=	-2.01197473		J11=	1787.47697				
Q2=	0.003		F2=	0.82019016		J12=	0				
Q3=	0.003		F3=	-0.003		J13=	2368.73321		m3/s	LPS	sumatoria
fs=	0.027					J21=	0	Q1=	0.00554	5.54	
fd=	0.028					J22=	2804.7269	Q2=	0.00361	3.61	
f2=	0.028					J23=	2368.73321	Q3=	0.00193	1.93	5.54
f3=	0.028					J31=	1				
						J32=	-1				
						J33=	-1				
2° iteración											
Q1=	0.00554		F1=	3.2714451		J11=	4012.45816				
Q2=	0.00361		F2=	0.76259745		J12=	0				
Q3=	0.00193		F3=	0		J13=	1563.95668		m3/s	LPS	sumatoria
fs=	0.025					J21=	0	Q1=	0.00497	4.97	
fd=	0.027					J22=	3431.23505	Q2=	0.0037	3.7	
f2=	0.029					J23=	1563.95668	Q3=	0.00127	1.27	4.97
f3=	0.03					J31=	1				
						J32=	-1				
						J33=	-1				
3° iteración											
Q1=	0.00497		F1=	0.27181869		J11=	3510.0229				
Q2=	0.0037		F2=	0.21953875		J12=	0				
Q3=	0.00127		F3=	0		J13=	1029.13211		m3/s	LPS	sumatoria
fs=	0.025					J21=	0	Q1=	0.00489	4.89	
fd=	0.027					J22=	3516.7783	Q2=	0.00364	3.64	
f2=	0.029					J23=	1029.13211	Q3=	0.00125	1.25	4.89
f3=	0.03					J31=	1				
						J32=	-1				
						J33=	-1				
4° iteración											
Q1=	0.00489		F1=	-0.02658302		J11=	3439.50567				
Q2=	0.00364		F2=	-0.01017766		J12=	0				
Q3=	0.00125		F3=	0		J13=	1012.92531		m3/s	LPS	sumatoria
fs=	0.025					J21=	0	Q1=	0.00489	4.89	
fd=	0.027					J22=	3459.74946	Q2=	0.00364	3.64	
f2=	0.029					J23=	1012.92531	Q3=	0.00125	1.25	4.89
f3=	0.03					J31=	1				
						J32=	-1				
						J33=	-1				

Grafo analítico (lps)	Matricial (lps)
$Q_1 = 5.40$	$Q_1 = 4.89$
$Q_2 = 3.70$	$Q_2 = 3.64$
$Q_3 = 1.70$	$Q_3 = 1.25$

Problema de redes abiertas número dos.



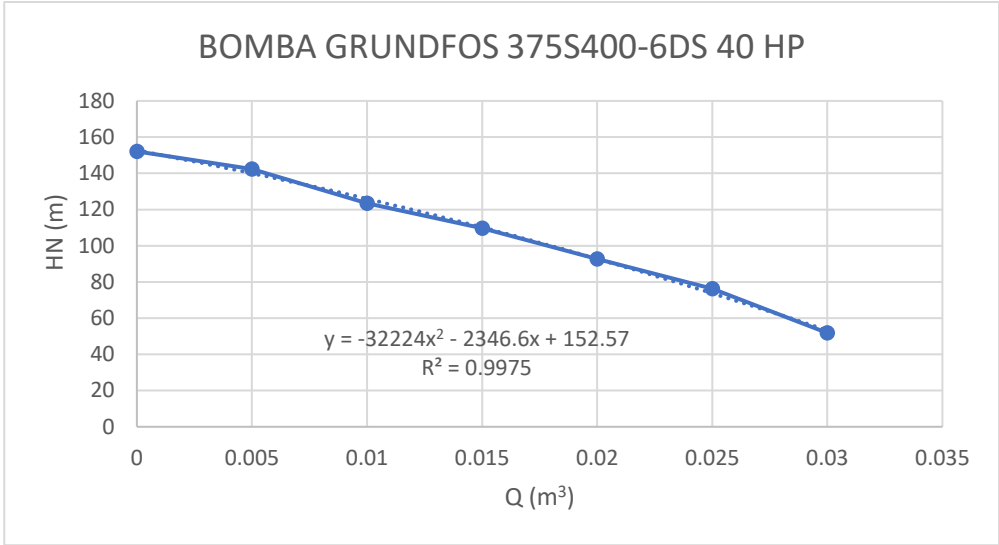
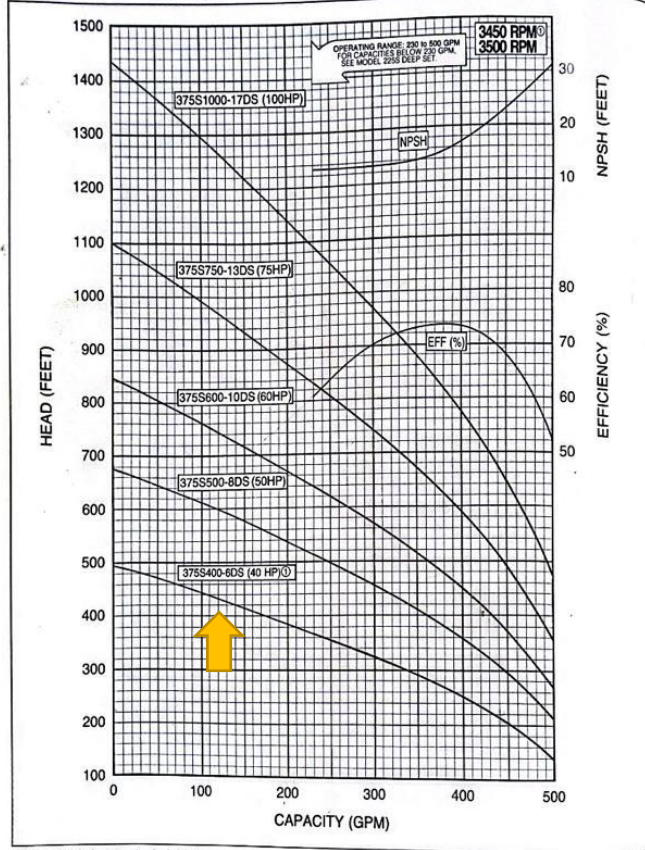


Tabla 3: ecuación de la bomba pozo uno, problema dos.

GRUNDFOS 375 GPM 375S DEEP SET

PERFORMANCE CURVES



NOTES: Ⓢ 6-inch motor standard; 8-inch motor optional. Specifications are subject to change without notice.

FLOW RANGE
 230 to 500 GPM

PUMP OUTLET
 4" NPT

Ilustración 8: Curva característica de la bomba seleccionada.

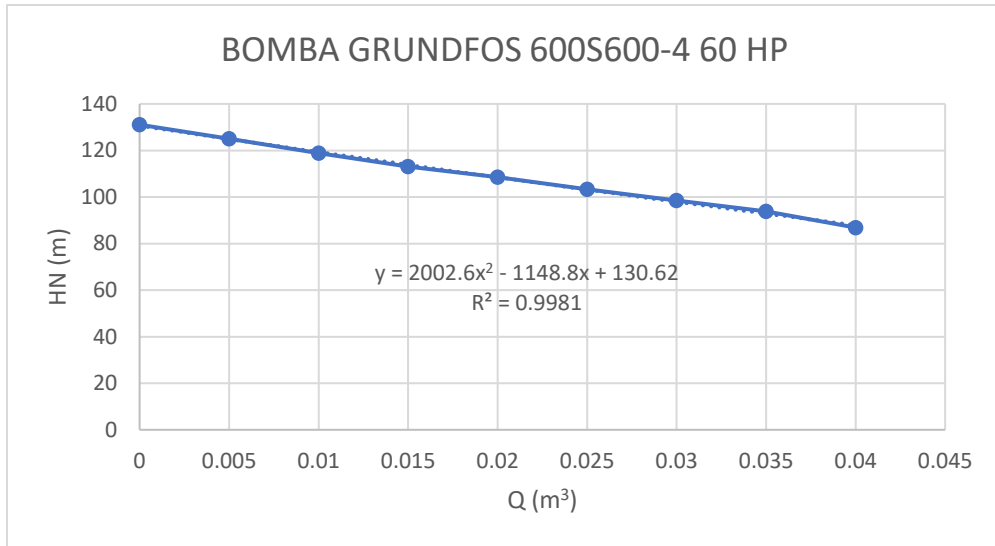


Tabla 4: ecuación de la bomba, pozo dos, del problema dos.

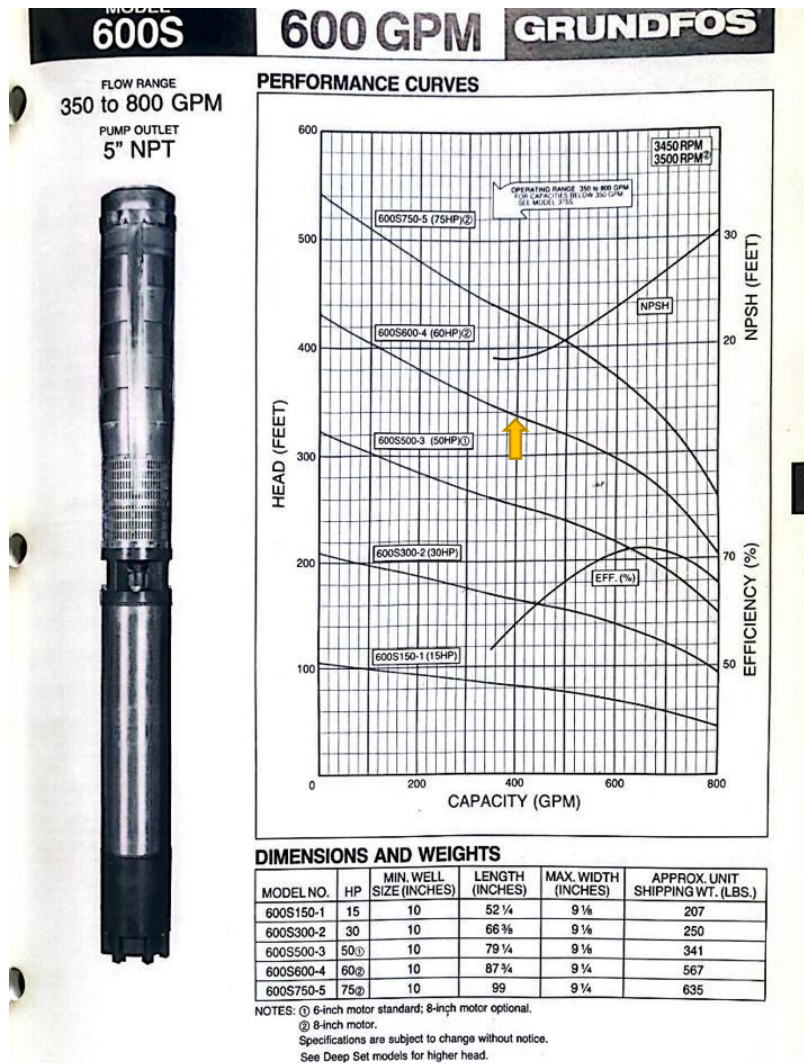


Ilustración 9: Curva característica de la bomba seleccionada, problema dos.

Formulas utilizadas en el método grafo analítico

Bomba sumergible del pozo 1:

$$Z_1 + \frac{P_1}{\delta} + \frac{\overline{V_1^2}}{2g} + CDT_1 = Z_N + \frac{P_N}{\delta} + \frac{\overline{V_1^2}}{2g} + hf_{CB_1} + hf_{d_1}$$

$$CDT_1 = H_N + hf_{CB_1} + hf_{d_1}$$

$$H_N = CDT_1 - hf_{CB_1} - hf_{d_1}$$

$$H_N = [AQ_1^2 + BQ_1 + C] + Z_1 - \left[\frac{8 * L_{CB_1}}{\pi^2 * (D_{CB_1})^5 * 9.81} \right] * f_{CB_1} * Q_1^2 - \left[\frac{8 * L_{d_1}}{\pi^2 * (D_{d_1})^5 * 9.81} \right] * f_{d_1} * Q_1^2$$

Se sustituyen los valores de longitudes y diámetros internos expresados en la tabla (numero). De tal forma la ecuación queda de la siguiente manera:

$$H_N = -32224Q_1^2 - 2346.6Q_1 + 152.57 + 8 - \left[\frac{8 * 52}{\pi^2 * (154.08)^5 * 9.81} \right] * f_{CB_1} * Q_1^2 - \left[\frac{8 * 280}{\pi^2 * (160.1)^5 * 9.81} \right] * f_{d_1} * Q_1^2$$

Se simplifica la formula al realizar las operaciones en los paréntesis con la finalidad que queden únicamente las variables en incógnitas para al momento de introducir la formula en EXCEL se sustituyan los valores con las casillas correspondientes:

$$H_N = -32224Q_1^2 - 2346.6Q_1 + 160.57 - [58038.97] * f_{CB_1} * Q_1^2 - [219949.31] * f_{d_1} * Q_1^2$$

Bomba sumergible del pozo 2:

$$Z_2 + \frac{P_2}{\delta} + \frac{\overline{V_2^2}}{2g} + CDT_2 = Z_N + \frac{P_N}{\delta} + \frac{\overline{V_2^2}}{2g} + hf_{CB_2} + hf_2$$

$$CDT_2 = H_N + hf_{CB_2} + hf_{d_2}$$

$$H_N = CDT_2 - hf_{CB_2} - hf_2$$

$$H_N = [AQ_2^2 + BQ_2 + C] + Z_2 - \left[\frac{8 * L_{CB2}}{\pi^2 * (D_{CB2})^5 * 9.81} \right] * f_{CB2} * Q_2^2 - \left[\frac{8 * L_{d2}}{\pi^2 * (D_{d2})^5 * 9.81} \right] * f_{d2} * Q_2^2$$

$$H_N = [2002.6Q_2^2 - 1148.8Q_2 + 130.62] - \left[\frac{8 * 40}{\pi^2 * (219.1)^5 * 9.81} \right] * f_{CB2} * Q_2^2 - \left[\frac{8 * 394}{\pi^2 * (208.5)^5 * 9.81} \right] * f_{d2} * Q_2^2$$

$$H_N = [2002.6Q_2^2 - 1148.8Q_2 + 130.62] - [8182.37] * f_{CB2} * Q_2^2 - [82620.37] * f_{d2} * Q_2^2$$

Línea 3:

$$Z_N + \frac{P_N}{\delta} + \frac{\overset{0}{\vec{V}_3^2}}{2g} = Z_3 + \frac{P_3}{\delta} + \frac{\overset{0}{\vec{V}_3^2}}{2g} + hf_3$$

$$H_N = Z_3 + \frac{P_3}{\delta} + hf_3$$

$$H_N = Z_3 + \frac{P_3}{\delta} + \left(\frac{8 * 413}{\pi^2 * (160.1)^5 * 9.81} \right) * f_3 * Q_3^2$$

$$H_N = 63 + 28.13 + (324425.23) * f_3 * Q_3^2$$

Línea 4:

$$Z_N + \frac{P_N}{\delta} + \frac{\overset{0}{\vec{V}_4^2}}{2g} = Z_4 + \frac{P_4}{\delta} + \frac{\overset{0}{\vec{V}_4^2}}{2g} + hf_4$$

$$H_N = Z_4 + \frac{P_4}{\delta} + hf_4$$

$$H_N = Z_4 + \frac{P_4}{\delta} + \left(\frac{8 * 320}{\pi^2 * (208.5)^5 * 9.81} \right) * f_4 * Q_4^2$$

$$H_N = 60 + 31.65 + (67102.84) * f_4 * Q_4^2$$

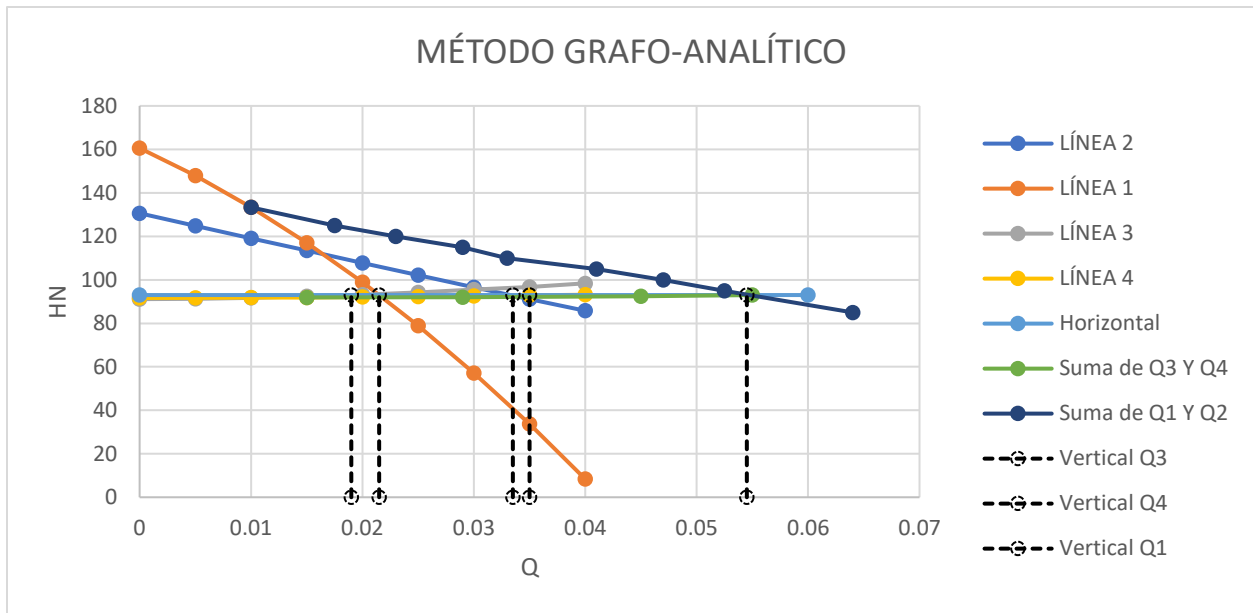


Tabla 5: Método grafo analítico del problema dos.

LÍNEA 1	
Q	HN
0	160.57
0.005	147.874154
0.01	133.330207
0.015	116.992001
0.02	98.8531971
0.025	78.9412137
0.03	57.1041478
0.035	33.6994168
0.04	8.36348842

LÍNEA 2	
Q	HN
0	130.62
0.005	124.87324
0.01	119.1482
0.015	113.46347
0.02	107.81449
0.025	102.223142
0.03	96.621324
0.035	91.156591
0.04	85.7727197

LÍNEA 3	
Q	HN
0	91.13
0.005	91.3084339
0.01	91.7464079
0.015	92.3709265
0.02	93.2063215
0.025	94.1714865
0.03	95.5097406
0.035	96.6938927
0.04	98.3971252

LÍNEA 4	
Q	HN
0	91.65
0.005	91.68858413
0.01	91.78420568
0.015	91.9217665
0.02	92.10629931
0.025	92.3210284
0.03	92.6162809
0.035	92.88301469
0.04	93.15310362

Suma de Q3 Y Q4	
Q	HN
0.015	91.92
0.029	92
0.045	92.5
0.055	93

Suma de Q1 Y Q2	
Q	HN
0.01	133.33
0.0175	125
0.023	120
0.029	115
0.033	110
0.041	105
0.047	100
0.0525	95
0.064	85

Q	fc2	fd2	fc1	fd1	f3	f4
0	0	0	0	0	0	0
0.005	0.026	0.023	0.025	0.022	0.022	0.023
0.01	0.023	0.02	0.023	0.019	0.019	0.02
0.015	0.022	0.018	0.022	0.017	0.017	0.018
0.02	0.021	0.017	0.021	0.016	0.016	0.017
0.025	0.02	0.016	0.021	0.015	0.015	0.016
0.03	0.02	0.016	0.021	0.015	0.015	0.016
0.035	0.019	0.015	0.021	0.014	0.014	0.015
0.04	0.019	0.014	0.02	0.014	0.014	0.014

Q_1 (m³/s) 0.0215	Q_1 (lps) 21.5
Q_2 (m³/s) 0.0335	Q_2 (lps) 33.5
Q_3 (m³/s) 0.019	Q_3 (lps) 19
Q_4 (m³/s) 0.035	Q_4 (lps) 35

Formulas utilizadas en el método de matrices Jacobianas:

$$F_1 = CDT_1 - H_N - hf_{CB_1} - hf_{d_1} = 0$$

$$F_1 = - \left(Z_4 + \frac{P_4}{\delta} + hf_4 \right) + (AQ_1^2 + BQ_1 + C) - hf_{CB_1} - hf_{d_1} = 0$$

$$F_1 = -(32224 + 58038.97 * f_{CB_1} + 219949.31 * f_{d_1}) * Q_1^2 - 2346.6 Q_1 + 68.92 - 67102.84 * f_4 * Q_4^2 = 0$$

$$F_2 = CDT_2 - H_N - hf_{CB_2} - hf_{d_2} = 0$$

$$F_2 = - \left(Z_4 + \frac{P_4}{\delta} + hf_4 \right) + (AQ_2^2 + BQ_2 + C) - hf_{CB_2} - hf_{d_2} = 0$$

$$F_2 = (2002.6 - 8182.37 * f_{CB_2} - 82620.37 * f_{d_2}) * Q_2^2 - 1148.8 Q_2 + 39.02 - 67102.84 * f_4 * Q_4^2 = 0$$

$$F_3 = Z_3 + \frac{P_3}{\delta} - H_N + hf_3 = 0$$

$$F_3 = -0.52 - 67102.84 * f_4 * Q_4^2 + 324425.23 * f_3 * Q_3^2 = 0$$

$$F_4 = Q_1 + Q_2 - Q_3 - Q_4 = 0$$

1 iteración									
Q1=	0.03	F1=	-38.4090129	J11=	-4703.9871			m3 por seg	LPS
Q2=	0.03	F2=	-0.93205884	J12=	0	Q1=	0.02178	21.78	
Q3=	0.03	F3=	5.72936122	J13=	0	Q2=	0.02917	29.17	
Q4=	0.03	F4=	0	J14=	-104.68043	Q3=	0.01871	18.71	
fc _{b1} =	0.027			J21=	0	Q4=	0.03225	32.25	
fd ₁ =	0.025			J22=	-1410.79016				
fc _{b2} =	0.028			J23=	0				
fd ₂ =	0.026			J24=	-104.68043				
f3=	0.025			J31=	0				
f4=	0.026			J32=	0				
				J33=	486.637845				
				J34=	-104.68043				
				J41=	1				
				J42=	1				
				J43=	-1				
				J44=	-1				

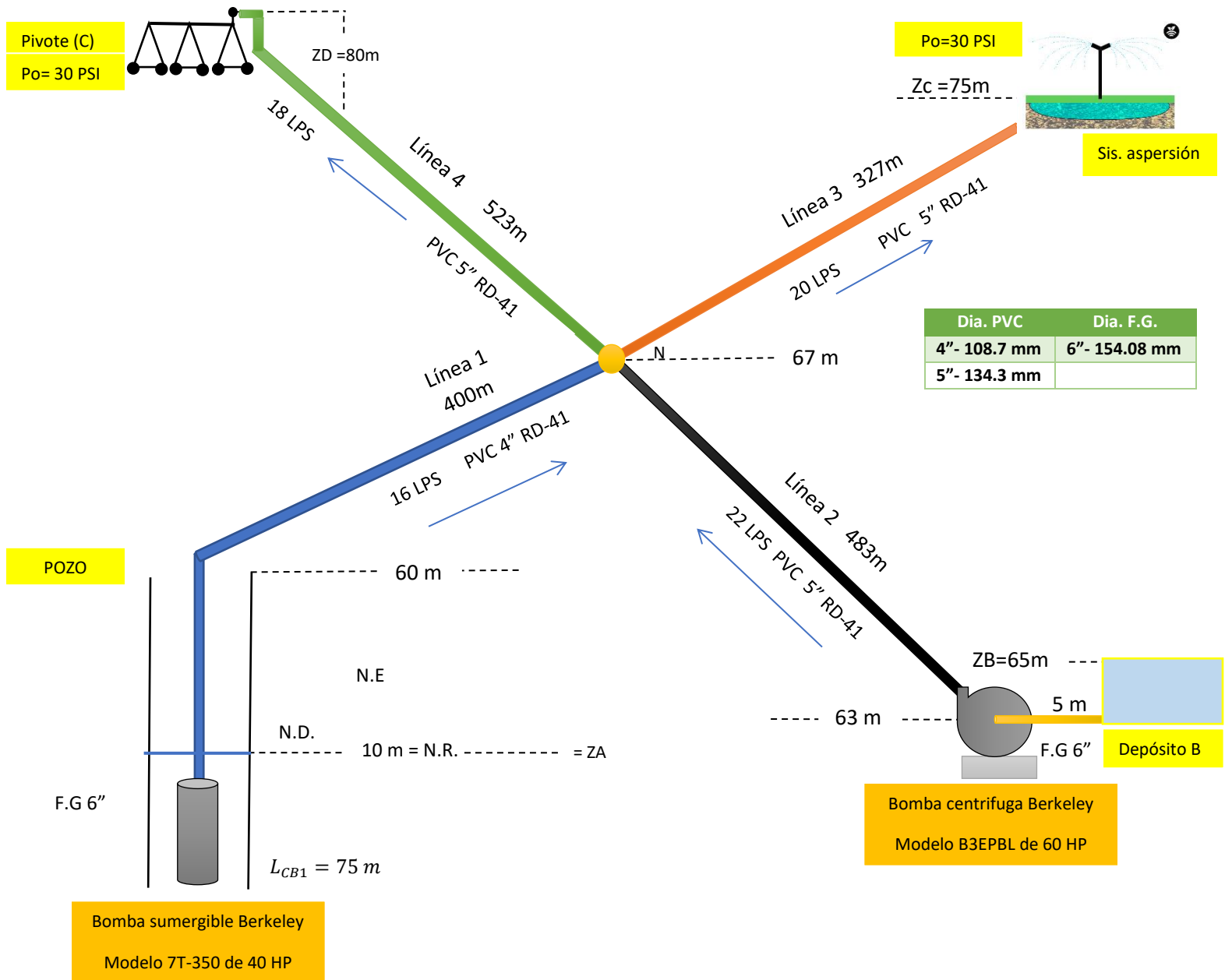
2 iteración									
Q1=	0.02178	F1=	-0.83921464	J11=	-3956.66504			m3 por seg	LPS
Q2=	0.02917	F2=	1.44813368	J12=	0	Q1=	0.02152	21.52	
Q3=	0.01871	F3=	0.70045566	J13=	0	Q2=	0.03	30	
Q4=	0.03225	F4=	-1E-05	J14=	-69.2501309	Q3=	0.01622	16.22	
fc _{b1} =	0.021			J21=	0	Q4=	0.03538	35.38	
fd ₁ =	0.016			J22=	-1351.50003				
fc _{b2} =	0.02			J23=	0				
fd ₂ =	0.016			J24=	-69.2501309				
f3=	0.016			J31=	0				
f4=	0.016			J32=	0				
				J33=	194.239874				
				J34=	-69.2501309				
				J41=	1				
				J42=	1				
				J43=	-1				
				J44=	-1				

3 iteración									
Q1=	0.02152	F1=	0.04374394	J11=	-3937.4448			m3 por seg	LPS
Q2=	0.03	F2=	0.18070995	J12=	0	Q1=	0.02152	21.52	
Q3=	0.01622	F3=	0.10570617	J13=	0	Q2=	0.0301	30.1	
Q4=	0.03538	F4=	-8E-05	J14=	-71.2229544	Q3=	0.01583	15.83	
fc _{b1} =	0.021			J21=	0	Q4=	0.03587	35.87	
fd ₁ =	0.016			J22=	-1357.2904				
fc _{b2} =	0.02			J23=	0				
fd ₂ =	0.016			J24=	-71.2229544				
f3=	0.016			J31=	0				
f4=	0.015			J32=	0				
				J33=	168.389671				
				J34=	-71.2229544				
				J41=	1				
				J42=	1				
				J43=	-1				
				J44=	-1				

4 iteración										
Q1=	0.02152		F1=	0.00860302		J11=	-3937.4448			m3 por seg LPS
Q2=	0.0301		F2=	0.00980511		J12=	0	Q1=	0.02152	21.52
Q3=	0.01583		F3=	0.0056828		J13=	0	Q2=	0.0301	30.1
Q4=	0.03587		F4=	-8E-05		J14=	-72.2093661	Q3=	0.01581	15.81
fc _{b1} =	0.021					J21=	0	Q4=	0.03589	35.89
fd ₁ =	0.016					J22=	-1357.98803			
fc _{b2} =	0.02					J23=	0			
fd ₂ =	0.016					J24=	-72.2093661			
f ₃ =	0.016					J31=	0			
f ₄ =	0.015					J32=	0			
						J33=	164.340845			
						J34=	-72.2093661			
						J41=	1			
						J42=	1			
						J43=	-1			
						J44=	-1			

Grafo analítico (lps)	Matricial (lps)
$Q_1 = 21.50$	$Q_1 = 21.52$
$Q_2 = 33.50$	$Q_2 = 30.10$
$Q_3 = 19.00$	$Q_3 = 15.81$
$Q_4 = 35.00$	$Q_4 = 35.89$

Problema de redes abiertas número tres



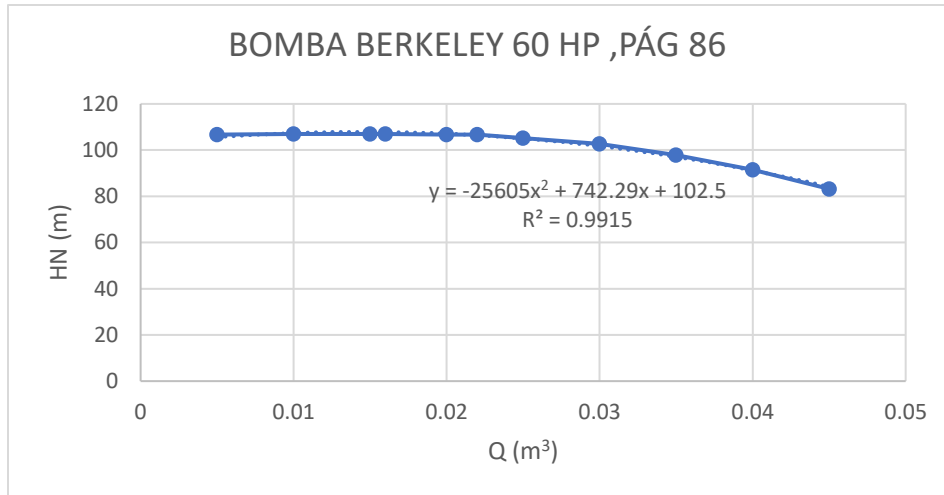


Tabla 6: Ecuación de la bomba centrífuga seleccionada del problema tres.

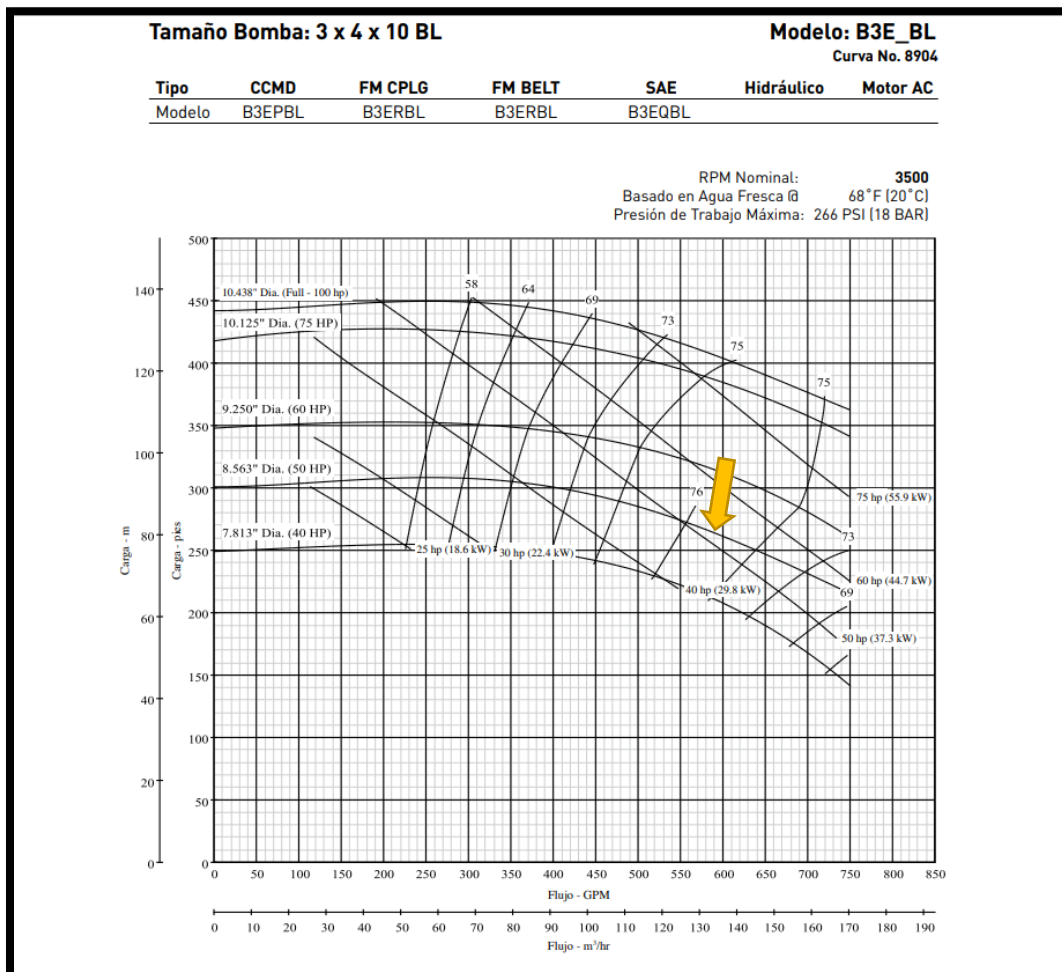


Ilustración 10: Curva característica de la bomba seleccionada del problema tres.

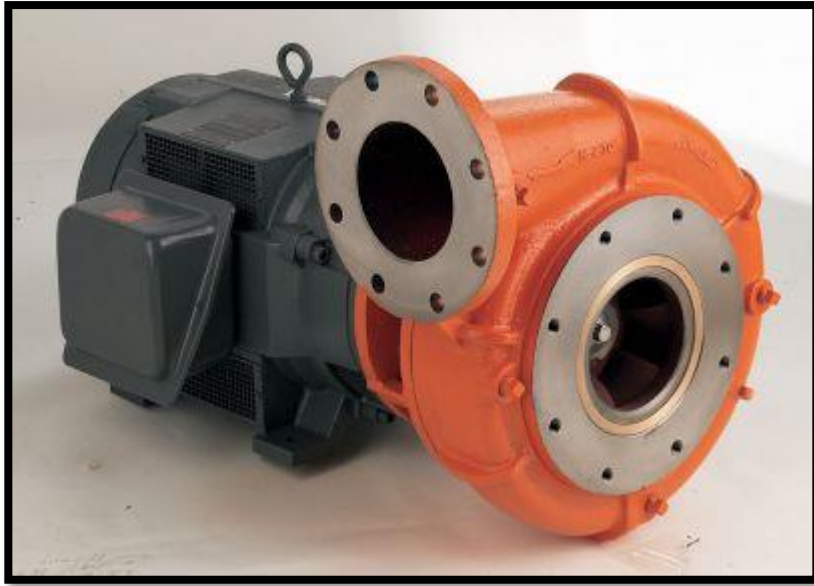


Ilustración 11: Bomba Centrifuga Berkeley, Modelo B3EPBL de 60 HP. 9.250" Dia.

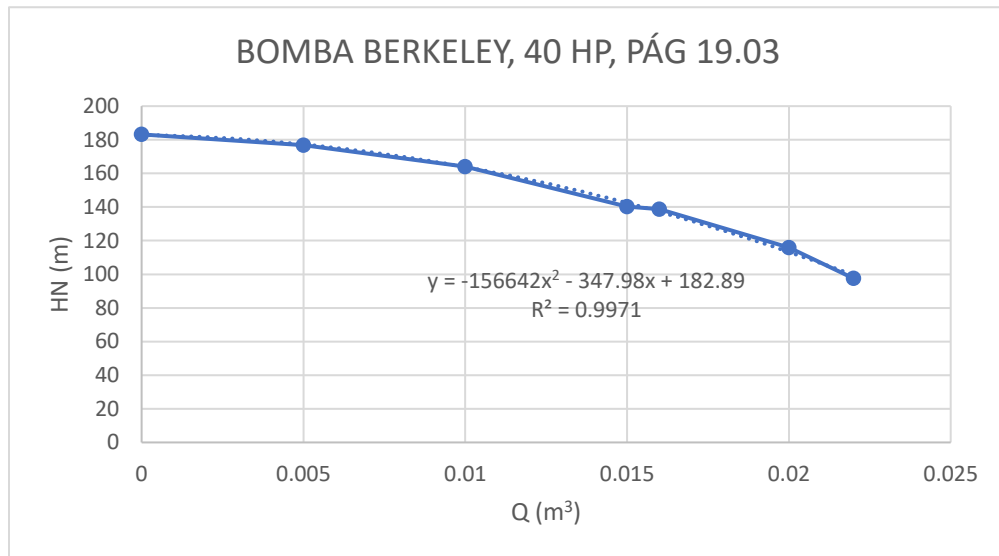
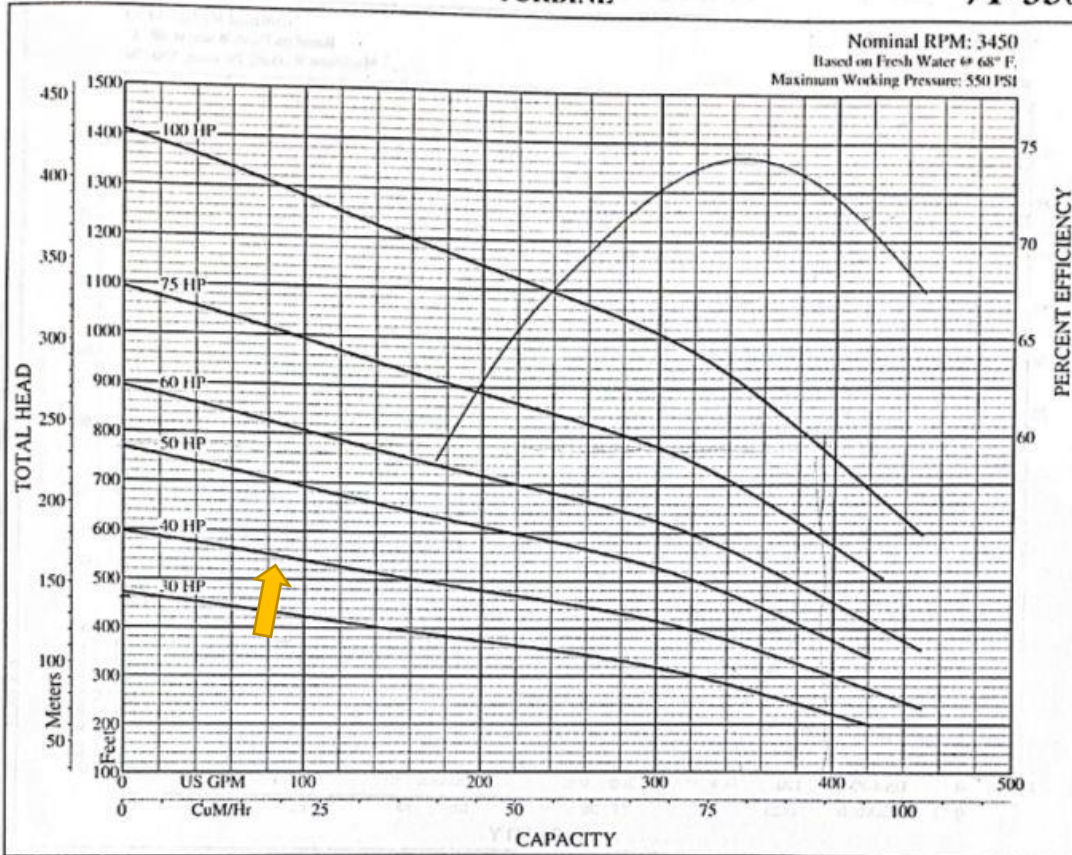


Tabla 7: Ecuación de la bomba sumergible del problema tres.



SUBMERSIBLE TURBINE

7T-350



OUTLINE DIMENSIONS / WEIGHTS

HP	stages	Motor size	P length	M* length	MD* dia.	Mtr. wt.	Pump wt.
30	5	6"	45.94	35.69	5.38	162	158
40	6	6"	52.44	40.81	5.38	195	183
50	8	6"	65.44	57.83	5.38	310	232
60	9	6"	71.94	63.83	5.38	340	257
75	11	8"	86.44	46.79	7.58	450	359
100	14	8"	105.94	54.29	7.58	520	434

Note: dimensions = inches; weight = U.S. lbs.
M* Maximum length (Franklin Electric Motor)
MD* Motor diameter (Franklin Electric Motor)

SPECIFICATIONS

Minimum Well I.D.	8.0 Inches
Minimum Submergence @ BEP (above inlet)	10.0 Feet
Capacity Range	147 - 450 GPM
Discharge	5" F x 6" M NPT
See manufacturer's data for motor cooling requirements	

SUPERSEDES
All Previous

Date **04/15/96**
Section **ST**
Page **19.03**

Ilustración 12: Curva característica de la bomba sumergible del problema tres.



Ilustración 13: Bomba sumergible Berkeley. Modelo 7T-350. 40 HP

HP	Stages	Motos Size	P length	M* length	MD* dia.	Mtr. wt.	Pump wt.
40	6	6"	52.44	40.81	5.38	195	183

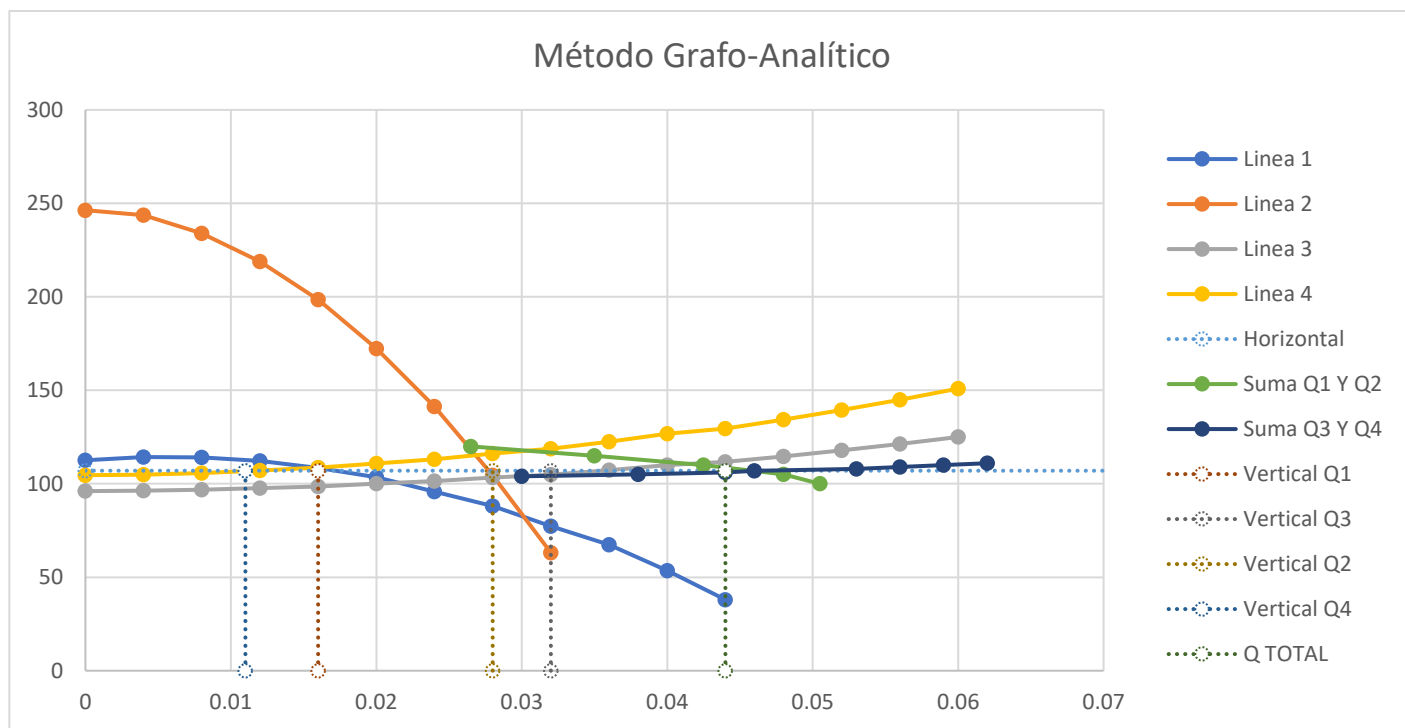


Tabla 8: Método grafo analítico del problema tres.

Linea 1	
Q	HN
0	112.5
0.004	114.298028
0.008	114.185644
0.012	112.162849
0.016	108.517544
0.02	103.437114
0.024	95.8453497
0.028	88.1305524
0.032	77.2771917
0.036	67.4033578
0.04	53.5260665
0.044	38.0136162

Linea 2	
Q	HN
0	246.35
0.004	243.668292
0.008	233.963305
0.012	218.906577
0.016	198.454871
0.02	172.387511
0.024	141.360132
0.028	104.518649
0.032	63.1556058

Linea 3	
Q	HN
0	96.09
0.004	96.3076865
0.008	96.8420081
0.012	97.603911
0.016	98.6230798
0.02	100.047937
0.024	101.433215
0.028	103.36271
0.032	104.955779
0.036	107.310752
0.04	109.94278
0.044	111.654588
0.048	114.613146
0.052	117.82897
0.056	121.30206
0.06	125.032415

Linea 4	
Q	HN
0	104.61
0.004	104.958165
0.008	105.812753
0.012	107.031332
0.016	108.661378
0.02	110.940279
0.024	113.155876
0.028	116.241887
0.032	118.789824
0.036	122.55634
0.04	126.765976
0.044	129.503821
0.048	134.235704
0.052	139.379056
0.056	144.933875
0.06	150.900163

Suma Q1 Y Q2	
Q	HN
0.0265	120
0.035	115
0.0425	110
0.048	105
0.0505	100
0.053	95

Suma Q3 Y Q4	
Q	HN
0.03	104
0.038	105
0.044	106
0.046	107
0.053	108
0.056	109
0.059	110
0.062	111
0.066	112
0.069	113
0.078	114
0.082	117
0.098	125

Q	fc _{b1}	fd ₁	f _s	fd ₂	f ₃	f ₄
0	0	0	0	0	0	0
0.004	0.026	0.021	0.026	0.022	0.022	0.022
0.008	0.023	0.018	0.023	0.019	0.019	0.019
0.012	0.022	0.017	0.022	0.017	0.017	0.017
0.016	0.021	0.016	0.021	0.016	0.016	0.016
0.02	0.021	0.015	0.021	0.016	0.016	0.016
0.024	0.022	0.015	0.022	0.015	0.015	0.015
0.028	0.021	0.014	0.021	0.015	0.015	0.015
0.032	0.021	0.014	0.021	0.014	0.014	0.014
0.036	0.021	0.013	0.021	0.014	0.014	0.014
0.04	0.021	0.013	0.021	0.014	0.014	0.014
0.044	0.02	0.013	0.02	0.013	0.013	0.013
0.048	0.02	0.013	0.02	0.013	0.013	0.013
0.052	0.02	0.013	0.02	0.013	0.013	0.013
0.056	0.02	0.013	0.02	0.013	0.013	0.013
0.06	0.02	0.013	0.02	0.013	0.013	0.013

Q_1 (m ³ /s) 0.016	Q_1 (lps) 16.00
Q_2 (m ³ /s) 0.028	Q_2 (lps) 28.00
Q_3 (m ³ /s) 0.032	Q_3 (lps) 32.00
Q_4 (m ³ /s) 0.011	Q_4 (lps) 11.00

Formulas utilizadas para el método de matrices jacobianas

Bomba sumergible:

$$Z_A + \frac{P_A}{\delta} + \frac{\overline{V}_A^2}{2g} + CDT_1 = Z_N + \frac{P_N}{\delta} + \frac{\overline{V}_N^2}{2g} + hf_{CB_1} + hf_{d_1}$$

$$Z_A + CDT_1 = H_N + hf_{CB_1} + hf_{d_1}$$

$$H_N = CDT_1 + Z_A - hf_{CB_1} - hf_{d_1}$$

$$CDT_1 + Z_A - H_N - hf_{CB_1} - hf_{d_1} \text{ ----} \rightarrow F_1 = 0$$

Bomba centrifuga:

$$Z_B + \frac{P_B}{\delta} + \frac{\overline{V}_B^2}{2g} + CDT_2 = Z_N + \frac{P_N}{\delta} + \frac{\overline{V}_N^2}{2g} + hf_{S_2} + hf_{d_2}$$

$$Z_B + CDT_2 = H_N + hf_{S_2} + hf_{d_2}$$

$$H_N = CDT_2 + Z_B - hf_{S_2} - hf_{d_2}$$

$$CDT_2 + Z_B - H_N - hf_{S_2} - hf_{d_2} \text{ ----} \rightarrow F_2 = 0$$

Línea 3:

$$Z_N + \frac{P_N}{\delta} + \frac{\overline{V}_3^2}{2g} = Z_C + \frac{P_C}{\delta} + \frac{\overline{V}_3^2}{2g} + hf_3$$

$$H_N = Z_C + \frac{P_C}{\delta} + hf_3$$

$$Z_C + \frac{P_C}{\delta} - H_N + hf_3 = 0 \text{ ----} \rightarrow F_3 = 0$$

Línea 4:

$$Z_N + \frac{P_N}{\delta} + \frac{\overline{V_4^2}}{2g} = Z_D + \frac{P_D}{\delta} + \frac{\overline{V_4^2}}{2g} + hf_4$$

$$H_N = Z_D + \frac{P_D}{\delta} + hf_4$$

$$Z_D + \frac{P_D}{\delta} - H_N + hf_4 = 0 \text{ -----} \rightarrow F_4 = 0$$

Formulas utilizadas para el método grafo analítico

Bomba sumergible:

$$H_N = CDT_1 + Z_A - hf_{CB_1} - hf_{d_1}$$

$$H_N = [AQ^2 + BQ + C] + 10 - \left[\frac{8 * 75}{\pi^2 * (0.15408)^5 * 9.81} \right] * f_{CB_1} * Q_1^2 - \left[\frac{8 * 400}{\pi^2 * (0.1087)^5 * 9.81} \right] * f_{d_1} * Q_1^2$$

Bomba centrifuga:

$$H_N = CDT_2 + Z_B - hf_s - hf_d$$

$$H_N = [AQ^2 + BQ + C] + 65 - \left[\frac{8 * 5}{\pi^2 * (0.15408)^5 * 9.81} \right] * f_s * Q_2^2 - \left[\frac{8 * 483}{\pi^2 * (0.1343)^5 * 9.81} \right] * f_{d_2} * Q_2^2$$

Línea 3:

$$H_N = Z_3 + \frac{P_C}{\delta} + hf_3$$

$$H_N = 75 + 21.09 + \left[\frac{8 * 327}{\pi^2 * (0.1343)^5 * 9.81} \right] * f_3 * Q_3^2$$

Línea 4:

$$H_N = Z_4 + \frac{P_D}{\delta} + hf_4$$

$$H_N = 80 + 24.61 + \left[\frac{8 * 523}{\pi^2 * (0.1343)^5 * 9.81} \right] * f_4 * Q_4^2$$

Método de matrices Jacobianas

1 iteración										
Q1=	0.03	F1=	-66.767165	J11=	-4176.4289			m3 por seg	LPS	
Q2=	0.03	F2=	-52.7770687	J12=	0	Q1=	0.01866	18.66		
Q3=	0.03	F3=	-17.7504585	J13=	0	Q2=	0.02701	27.01		
Q4=	0.03	F4=	0	J14=	-1543.00544	Q3=	0.02824	28.24		
fc1=	0.027			J21=	0	Q4=	0.01744	17.44		
fd1=	0.025			J22=	-11179.4858					
fs=	0.028			J23=	0					
fd2=	0.026			J24=	-1543.00544					
f3=	0.025			J31=	0					
f4=	0.026			J32=	0					
				J33=	927.641535					
				J34=	-1543.00544					
				J41=	1					
				J42=	1					
				J43=	-1					
				J44=	-1					

2 iteración										
Q1=	0.01866	F1=	-3.88455909	J11=	-1488.39037			m3 por seg	LPS	
Q2=	0.02701	F2=	4.72205674	J12=	0	Q1=	0.01806	18.06		
Q3=	0.02824	F3=	-5.93552368	J13=	0	Q2=	0.02781	27.81		
Q4=	0.01744	F4=	-1E-05	J14=	-552.000304	Q3=	0.03385	33.85		
fc1=	0.021			J21=	0	Q4=	0.01203	12.03		
fd1=	0.015			J22=	-9555.35214					
fs=	0.021			J23=	0					
fd2=	0.015			J24=	-552.000304					
f3=	0.015			J31=	0					
f4=	0.016			J32=	0					
				J33=	523.931939					
				J34=	-552.000304					
				J41=	1					
				J42=	1					
				J43=	-1					
				J44=	-1					

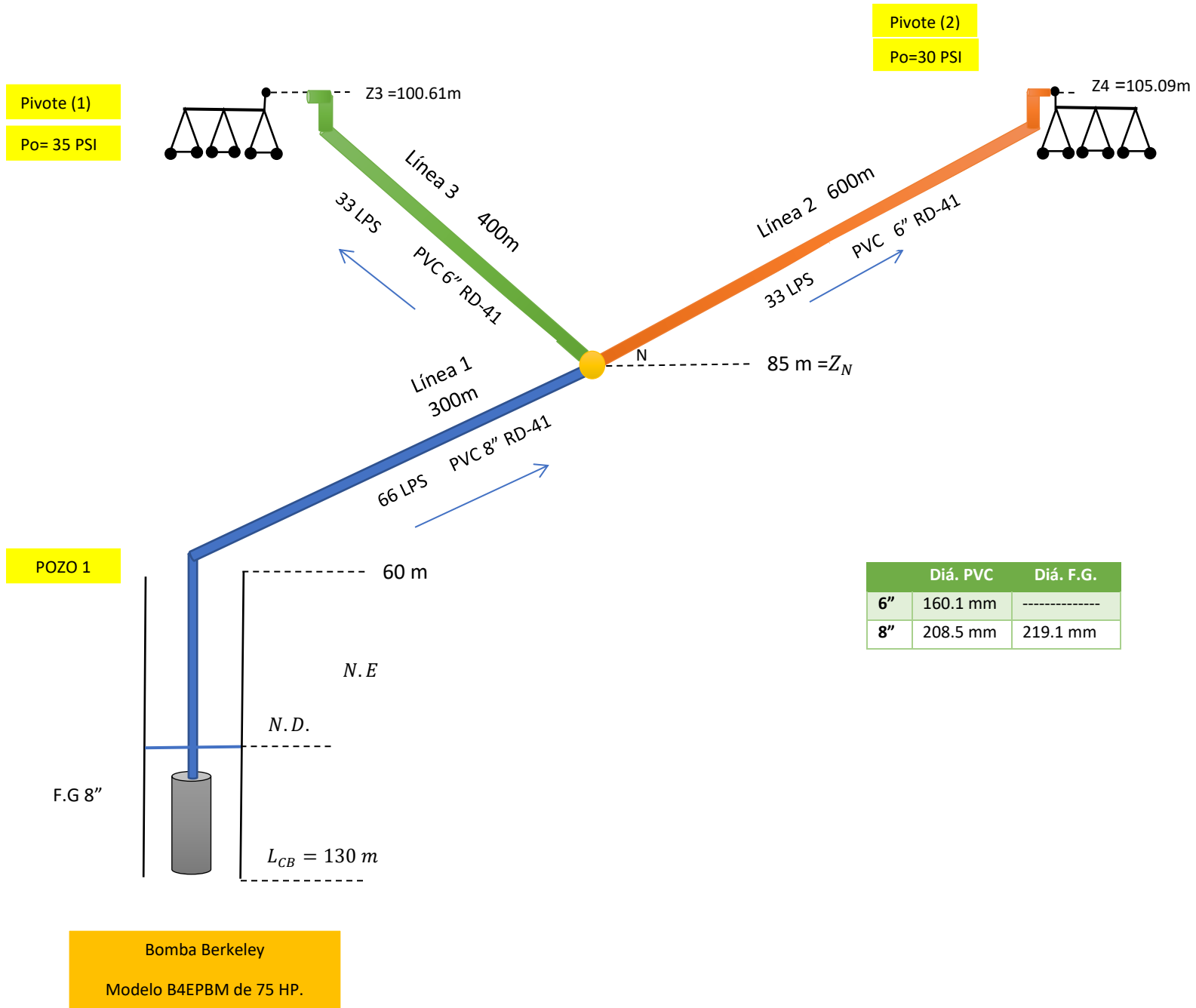
3 iteración									
Q1=	0.01806	F1=	-0.63305343	J11=	-1416.66431			m3 por seg	LPS
Q2=	0.02781	F2=	-0.65131973	J12=	0	Q1=	0.01793	17.93	
Q3=	0.03385	F3=	-1.03293634	J13=	0	Q2=	0.02779	27.79	
Q4=	0.01203	F4=	-1E-05	J14=	-404.564157	Q3=	0.03483	34.83	
fc1=	0.021			J21=	0	Q4=	0.0109	10.9	
fd1=	0.015			J22=	-9828.06217				
fs=	0.021			J23=	0				
fd2=	0.015			J24=	-404.564157				
f3=	0.014			J31=	0				
f4=	0.017			J32=	0				
				J33=	586.145765				
				J34=	-404.564157				
				J41=	1				
				J42=	1				
				J43=	-1				
				J44=	-1				

4 iteración									
Q1=	0.01793	F1=	-0.01421054	J11=	-1401.12367			m3 por seg	LPS
Q2=	0.02779	F2=	-0.01913999	J12=	0	Q1=	0.01793	17.93	
Q3=	0.03483	F3=	-0.01451168	J13=	0	Q2=	0.02779	27.79	
Q4=	0.0109	F4=	-1E-05	J14=	-366.562702	Q3=	0.03484	34.84	
fc1=	0.021			J21=	0	Q4=	0.01088	10.88	
fd1=	0.015			J22=	-9821.24442				
fs=	0.021			J23=	0				
fd2=	0.015			J24=	-366.562702				
f3=	0.014			J31=	0				
f4=	0.017			J32=	0				
				J33=	603.11542				
				J34=	-366.562702				
				J41=	1				
				J42=	1				
				J43=	-1				
				J44=	-1				

5 iteración									
Q1=	0.01793	F1=	-0.12397084	J11=	-1401.12367			m3 por seg	LPS
Q2=	0.02779	F2=	-0.1289003	J12=	0	Q1=	0.01793	17.93	
Q3=	0.03484	F3=	-0.11823997	J13=	0	Q2=	0.02779	27.79	
Q4=	0.01088	F4=	0	J14=	-387.413058	Q3=	0.03484	34.84	
fc1=	0.021			J21=	0	Q4=	0.01088	10.88	
fd1=	0.015			J22=	-9821.24442				
fs=	0.021			J23=	0				
fd2=	0.015			J24=	-387.413058				
f3=	0.014			J31=	0				
f4=	0.018			J32=	0				
				J33=	603.28858				
				J34=	-387.413058				
				J41=	1				
				J42=	1				
				J43=	-1				
				J44=	-1				

Grafo analítico (lps)	Matricial (lps)
$Q_1 = 16.00$	$Q_1 = 17.93$
$Q_2 = 28.00$	$Q_2 = 27.79$
$Q_3 = 32.00$	$Q_3 = 34.84$
$Q_4 = 11.00$	$Q_4 = 10.88$

Problema de redes abiertas número cuatro



Aplicación de la Ecuación de Bernoulli del punto 1-N:

$$Z_1 + \frac{P_1}{\delta} + \frac{\overline{V}_1^2}{2g} + CDT = Z_N + \frac{P_N}{\delta} + \frac{\overline{V}_1^2}{2g} + hf_{CB} + hf_d$$

$$CDT = H_N + hf_{CB} + hf_d$$

$$H_N = CDT - hf_{CB} - hf_d$$

Aplicación de la Ecuación de Bernoulli del punto 2-N y 3-N:

$$Z_N + \frac{P_N}{\delta} + \frac{\overline{V}_2^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\delta} + \frac{\overline{V}_2^2}{2g} + hf_2$$

$$H_N = Z_2 + \frac{P_2}{\delta} + hf_2$$

$$H_N = Z_3 + \frac{P_3}{\delta} + hf_3$$

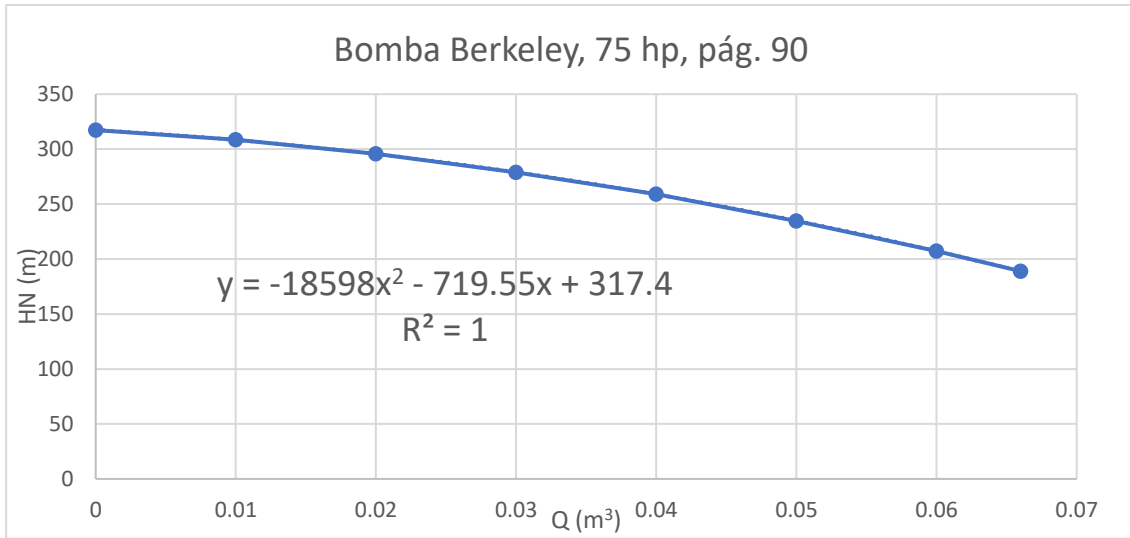


Tabla 9: Ecuación de la bomba seleccionada del problema cuatro.

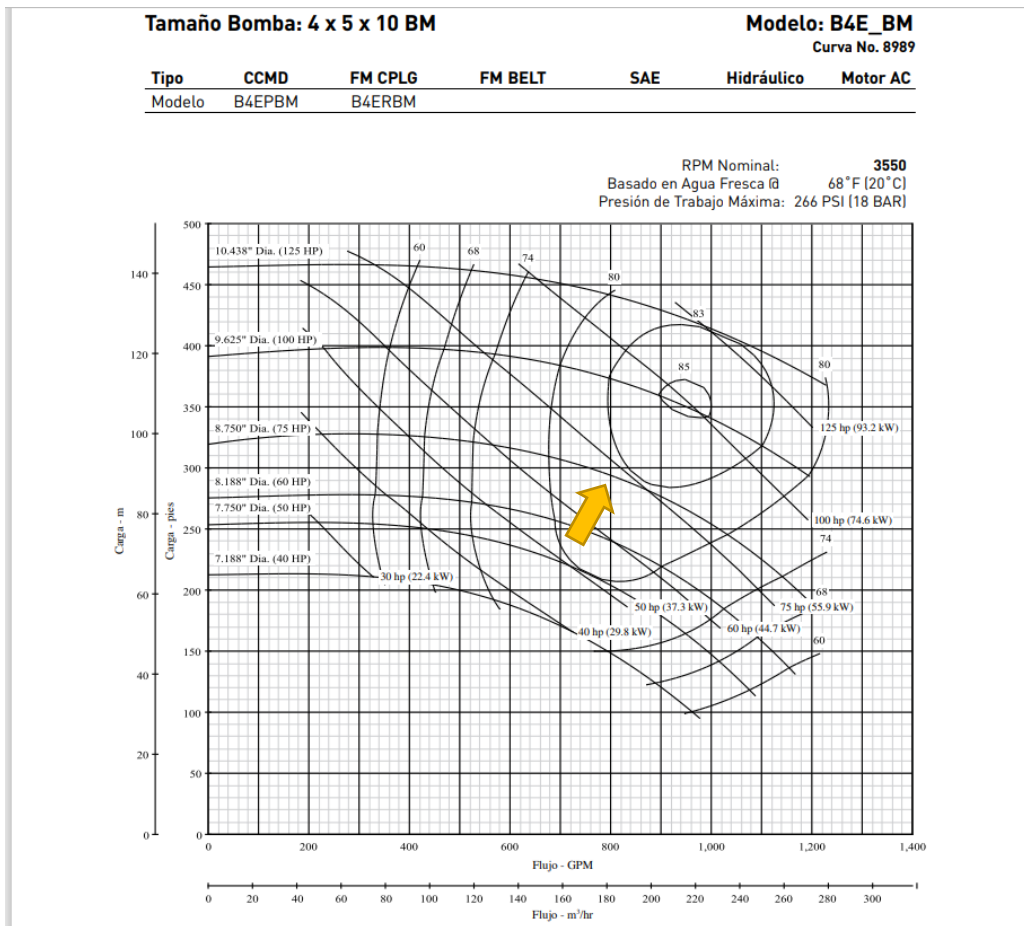


Ilustración 14: Curva característica de la bomba seleccionada, problema cuatro.

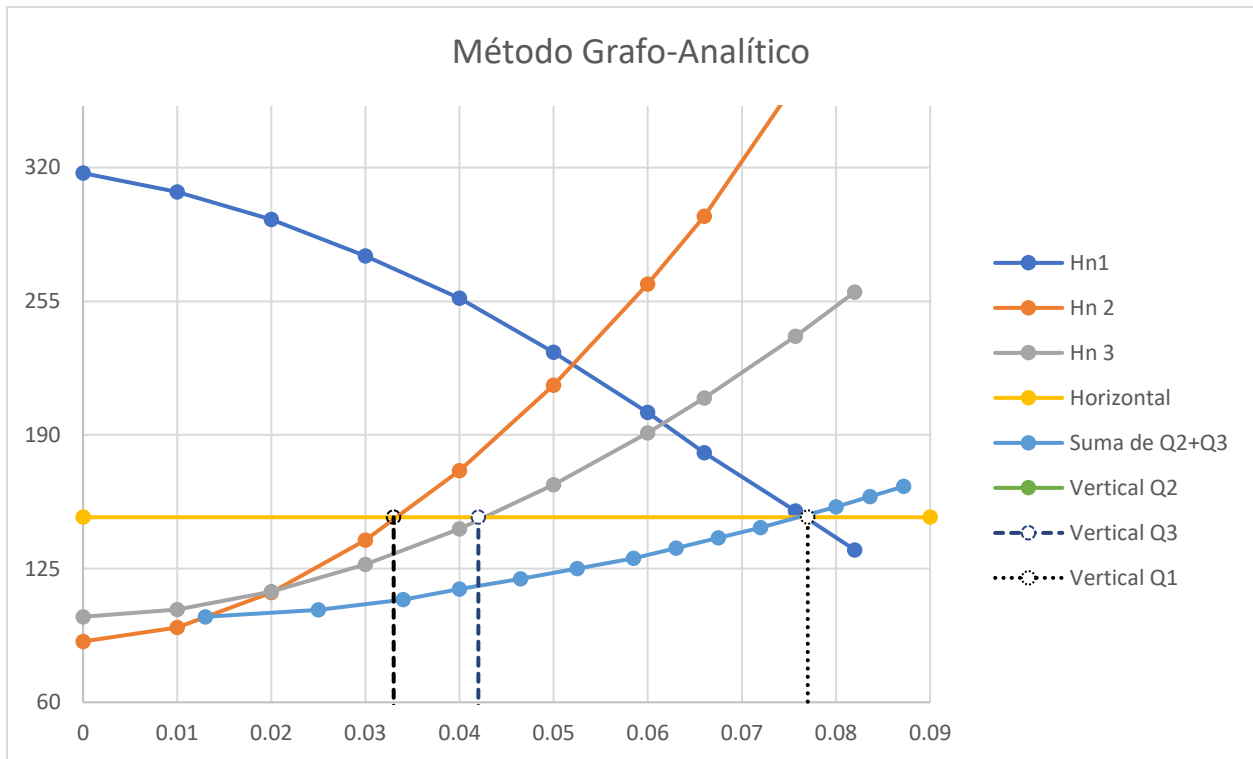


Tabla 10: Método grafo analítico del problema cuatro.

Tubería 1	
Q	Hn
0	317.3
0.01	308.215338
0.02	294.807051
0.03	277.108042
0.04	256.529229
0.05	230.16387
0.06	200.918793
0.066	181.422925
0.0757	153.034093
0.082	134.118989

Tubería 2	
Q	Hn
0	89.61
0.01	96.4195129
0.02	113.280462
0.03	138.885637
0.04	172.654058
0.05	214.222233
0.06	263.318961
0.066	296.304873
0.0757	361.005062
0.082	404.039106

Tubería 3	
Q	Hn
0	101.61
0.01	105.132645
0.02	113.824351
0.03	126.98662
0.04	144.368146
0.05	165.728366
0.06	190.94059
0.066	207.881816
0.0757	238.059179
0.082	259.49732

Suma de Q2+Q3	
Q	Hn
0.013	101.61
0.025	105
0.034	110
0.04	115
0.0465	120
0.0525	125
0.0585	130
0.063	135
0.0675	140
0.072	145
0.08	155
0.0836	160
0.0872	165

Q	fcB	fd	f2	f3
0	0	0	0	0
0.01	0.022731	0.019787	0.018003	0.018685
0.02	0.020849	0.0170836	0.015645	0.016197
0.03	0.020073	0.015751	0.014475	0.014956
0.04	0.001964	0.0148986	0.013722	0.014175
0.05	0.01936	0.0142838	0.013178	0.013604
0.06	0.019163	0.013809	0.012757	0.013162
0.066	0.01907	0.01357	0.012545	0.0129406
0.0757	0.018948	0.01323	0.012521	0.01263
0.082	0.018883	0.01304	0.012363	0.012455

Q_1	Q_1
(m3/s)	(lps)
0.077	77
Q_2	Q_2
(m3/s)	(lps)
0.033	33
Q_3	Q_3
(m3/s)	(lps)
0.042	42

Método de matrices Jacobianas

1° iteración										
Q1=	0.003	F1=	-150.285	J11=	1966.43					
Q2=	0.003	F2=	11.8923	J12=	0					
Q3=	0.003	F3=	-0.03	J13=	1693.36			m3/s	LPS	sumatoria
fcB=	0.0193			J21=	0	Q1=	0.08829		88.29	
fd=	0.0142			J22=	3285.04	Q2=	0.03723		37.23	
f2=	0.0139			J23=	-5643.36	Q3=	0.05106		51.06	88.29
f3=	0.0136			J31=	1					
				J32=	-1					
				J33=	-1					

2° iteración										
Q1=	0.003	F1=	5.79	J11=	3845.2					
Q2=	0.003	F2=	-1.0418	J12=	0					
Q3=	0.003	F3=	0	J13=	2266.71			m3/s	LPS	sumatoria
fcB=	0.0193			J21=	0	Q1=	0.07524		75.24	
fd=	0.0142			J22=	3529.92	Q2=	0.03311		33.11	
f2=	0.0139			J23=	-2266.71	Q3=	0.04213		42.13	75.24
f3=	0.0136			J31=	1					
				J32=	-1					
				J33=	-1					

3° iteración										
Q1=	0.003	F1=	73.62	J11=	4357.47					
Q2=	0.003	F2=	-5.972	J12=	0					
Q3=	0.003	F3=	0	J13=	2618.34			m3/s	LPS	sumatoria
fcB=	0.0189			J21=	0	Q1=	0.07627		76.27	
fd=	0.0132			J22=	394.79	Q2=	0.03333		33.33	
f2=	0.0419			J23=	-2618.34	Q3=	0.04294		42.94	76.27
f3=	0.0147			J31=	1					
				J32=	-1					
				J33=	-1					

Grafo analítico (lps)	Matricial (lps)
$Q_1 = 77.00$	$Q_1 = 76.27$
$Q_2 = 33.00$	$Q_2 = 33.33$
$Q_3 = 42.00$	$Q_3 = 42.94$

4.2 Tabla de comparación de caudales con el método grafo analítico versus matrices jacobianas.

Caudal	Grafo analítico (lps)	Matrices (lps)	Residuo (lps)
Q_1	5.40	4.89	0.51
Q_2	3.70	3.64	0.06
Q_3	1.70	1.25	0.45

Tabla 11: Tratamiento del problema uno.

Caudal	Grafo analítico (lps)	Matrices (lps)	Residuo (lps)
Q_1	21.50	21.52	-0.02
Q_2	33.50	30.10	3.40
Q_3	19.00	15.81	3.19
Q_4	35.00	35.89	-0.89

Tabla 12: Tratamiento del problema dos.

Caudal	Grafo analítico (lps)	Matrices (lps)	Residuo (lps)
Q_1	16.00	17.83	-0.83
Q_2	28.00	27.79	0.21
Q_3	32.00	34.84	-2.84
Q_4	11.00	10.88	0.88

Tabla 13: Tratamiento del problema tres.

Caudal	Grafo analítico (lps)	Matrices (lps)	Residuo (lps)
Q_1	77	76.27	0.73
Q_2	33	33.33	-0.33
Q_3	42	42.94	-0.94

Tabla 14: Tratamiento del problema cuatro.

4.3 Prueba estadística de los resultados

La prueba de independencia ji cuadrado comprueba si es probable que dos variables estén o no relacionadas. Tenemos conteos de dos variables nominales o categóricas. También tenemos la noción de que ambas no están relacionadas. Esta prueba nos da una forma de decidir si esta noción es plausible o no. En este caso se utilizó esta prueba con los datos de los caudales medidos y los estimados por el modelo, aplicando la fórmula siguiente:

$$\chi^2 \text{ calculada} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \right]$$

Ecuación 1: Ecuación de Ji cuadrada.

Donde:

$\chi^2 \text{ calculada}$ = Ji cuadrada

O_i = Datos observados

E_i = Datos esperados

Grafo-analítico (lps)	Matrices (lps)	Residuo (lps)	Ji Cuadrada χ^2
4.89	5.40	-0.51	0.04817
3.64	3.70	-0.06	0.000973
1.25	1.70	-0.45	0.11911
21.52	21.50	0.02	0.0000186
30.10	33.50	-3.40	0.3451
15.81	19.00	-3.19	0.5356
35.89	35.00	0.89	0.0221
17.83	16.00	0.83	0.2093
27.79	28.00	-0.21	0.001575
34.84	32.00	2.84	0.25205
10.88	11.00	-0.88	0.001309
76.27	77.00	-0.73	0.006921
33.33	33.00	0.33	0.0033
42.94	42.00	0.94	0.02104
		Sumatoria=	1.566566

Tabla 15: Prueba de Ji cuadrada aplicada a los cuatro tratamientos.

Ji cuadrada calculada y de tablas, con 13 grados de libertad:

$$\chi^2_{Calculada} = 1.566566 < \chi^2_{Tabla_{GL=13}} = 22.36$$

Por tanto, no se rechaza H_0 con un nivel de significancia $\alpha = 0.05$

Los grados de libertad se obtienen con la ecuación de $n-1$, donde n , es el número de datos que se obtuvieron, al tener este dato, se obtiene el valor de la tabla de acuerdo al coeficiente $\alpha = 0.05$ y a los grados de libertad.

5. Conclusión y recomendaciones

Se ha validado la hipótesis general con un 95% de eficiencia con datos que expresa el método matricial con respecto a un método ya aprobado denominado “nuevo método grafo analítico”.

El método matricial utiliza ecuaciones de la energía del flujo de agua tomando en cuenta sus pérdidas de energía aunado con la ecuación de continuidad relacionando el contenido de masa que fluye por la red.

Las ecuaciones que rigen el comportamiento hidráulico son de un flujo permanente con un fluido incompresible en régimen turbulento, por lo tanto, su aplicación plantea la resolución de un sistema de ecuaciones no lineales y lineales, que establecen el equilibrio de energía y masa, dentro de la red.

La ventaja del método matricial es que agiliza la solución y arroja datos muy precisos, es muy importante seleccionar la(s) bomba(s), diámetros y materiales de los conductos que sean los más adecuados para llevar los caudales y las presiones correctas que requieren los sistemas de riego, sin embargo, es necesario un método ágil y eficaz para hacer una buena selección de bombas y diámetros, para tener un diseño óptimo de una red y para ello el método matricial es la mejor opción.

Otra ventaja que se presenta con el método matricial es que toda la solución de matrices se efectuó en este trabajo con una calculadora científica utilizada por cualquier alumno de ingeniería, sin la necesidad de utilizar aplicaciones con lenguajes de programación, como Matlab, Visual Basic, R studio, C++, entre otros.

6. Bibliografía

Burden, R. L., y J. D. Faires. (1985). Análisis Numérico. Grupo Editorial Iberoamérica, México. 721 p.

CONAGUA. (2019). Usos del Agua. Disponible en: <https://www.gob.mx/conagua/acciones-y-programas/usos-del-agua>. Consultado el 4/marzo/2023.

Diagrama de Moody. Diagramaweb.com. Disponible en: <https://diagramaweb.com/moody/>. Consultado el 30/mayo/2023.

Diario Oficial de la Federación (24/03/2016). Ley de Aguas Nacionales. 1992.

Farfán Pimentel J, F.,. Prueba de chi cuadrada (Estadística). Disponible en: <https://www.monografias.com/trabajos-pdf5/prueba-chi-cuadrada-estadistica/prueba-chi-cuadrada-estadistica>. Consultado el 29/mayo /2023.

Garza Vara, S. Z. (2012). Modelación matemática de bombas interconectadas en redes abiertas para irrigación y su solución matricial. (Tesis de doctorado, Universidad Autónoma de Nuevo León). UANL. <http://cdigital.dgb.uanl.mx/te/1080240805.PDF>

GRUNDFOS Pumps Corp. Grundfos Stainless Steel Pumps For Groundwater Application (Catálogo de Exposición).

Hydraulic Institute. (1995). Berkeley Pumps Making the Selection Easy. (Catálogo de Exposición). Delavan Wi.

Karassik, I. J., J. P. Messina, Cooper, and C. C. Heald. 2008. Pump handbook. Third edition. McGraw-Hill, New York. pp. 1.1-1.7-

King, H. W., C. O. Wisler, and J. G. Woodburn. 1948. Hydraulics. Fifth Edition, Wiley International Edition, New York, N.Y. USA. 351 p.

Mata Cruz A. (2008). Nuevo método grafo analítico para redes abiertas con bombeo. (Tesis licenciatura, Universidad Autónoma Agraria Antonio Narro). UAAAN. <http://repositorio.uaaan.mx:8080/xmlui/handle/123456789/5577>

Mataix, C. (1982). Mecánica de Fluidos y Maquinas Hidráulicas. Segunda Edición. Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C.V. Oxford University Press. México. 660 p.

Mott, Robert L. 2006. Mecánica de Fluidos. Sexta edición. Pearson Educación. México. 644p.

Munson, B. R., D.F. Young, y T.H. Okiishi. 2007. Fundamentos de Mecánica de Fluidos. Limusa Wiley, México. 867p.

Nekrasov, B. (1996). Hidráulica. Segunda Edición. Editorial MIR. URSS. 279 p.

Pentair Ltd. (2013). Berkeley Bombas Centrifugas. (Catálogo de Exposición). Delavan Wi.

Pentair Water. (2010). Catálogo de Productos Cuma 2010-2012. (Catálogo de Exposición).

Peña- Diaz, S. (2019). Condiciones hídricas en la cuenca del Valle de México. Tecnología y ciencias del agua. DOI: [10.24850/j-tyca-2019-02-04](https://doi.org/10.24850/j-tyca-2019-02-04). Disponible en: [http://www.revistatyca.org.mx/index.php/tyca/article/view/2031/1780#content/citation_re](http://www.revistatyca.org.mx/index.php/tyca/article/view/2031/1780#content/citation_reference_19)
[ference_19](http://www.revistatyca.org.mx/index.php/tyca/article/view/2031/1780#content/citation_reference_19). Consultado el 15/mayo/2023.

Peña, S. (2014). Introducción a la hidrología subterránea: 170-176, Proyectos, Estudios y Sistemas, S.A. de C.V., D.F., México.

REGLAMENTO DE LA LEY DEL SERVICIO PÚBLICO DE ENERGÍA ELÉCTRICA.

Última reforma publicada DOF 30-11-2012. Disponible en:

<https://www.cre.gob.mx/documento/3841.pdf>. Consultado el 15/mayo/2023.

SAGARPA. (2022). Escasez de agua, disponibilidad y agricultura. Disponible en:

<https://www.gob.mx/imta/articulos/escasez-de-agua-disponibilidad-y-agricultura?idiom=es>. Consultado el 4/marzo/2023.

Saldarriaga, J. (2008). Hidráulica de Tuberías. Abastecimiento de aguas, redes, riego. Primera Edición. Alfaomega, Bogotá, Colombia. 690 p.

Shames, I. H. (1995). Mecánica de Fluidos. Tercera Edición. McGraw-Hill Interamericana S.A. Santafé de Bogotá, Colombia. 825 p.

Skousen, R. (1992). Analogy and Structure. Kluwer Academic Publisher. Netherlands. 392 p.

Sotelo-Ávila, G. 1998. Hidráulica General. Volumen 1. Fundamentos. Editorial Limusa S.A. de C.V. México. 561p.

Spiegel, M. R. (2001). Matemáticas Avanzadas para Ingeniería y Ciencias. McGraw-Hill. México, D.F. 498 p.

Stewart, J. (2002). Calculo Multivariable. Cuarta Edición. Thompson Learning, INC. México. 1151 p.

Streeter, V.L., E. B. Wylie, y K.W. Bedford. 2000. Mecánica de fluidos. Novena Edición. McGraw-Hill, Santa Fe de Bogotá, Colombia. 740p.

White, F. M. (2008). Mecánica de Fluidos. Sexta Edición, McGraw-Hill, México. 864 p.

7. Apéndice

Diagrama de Moody

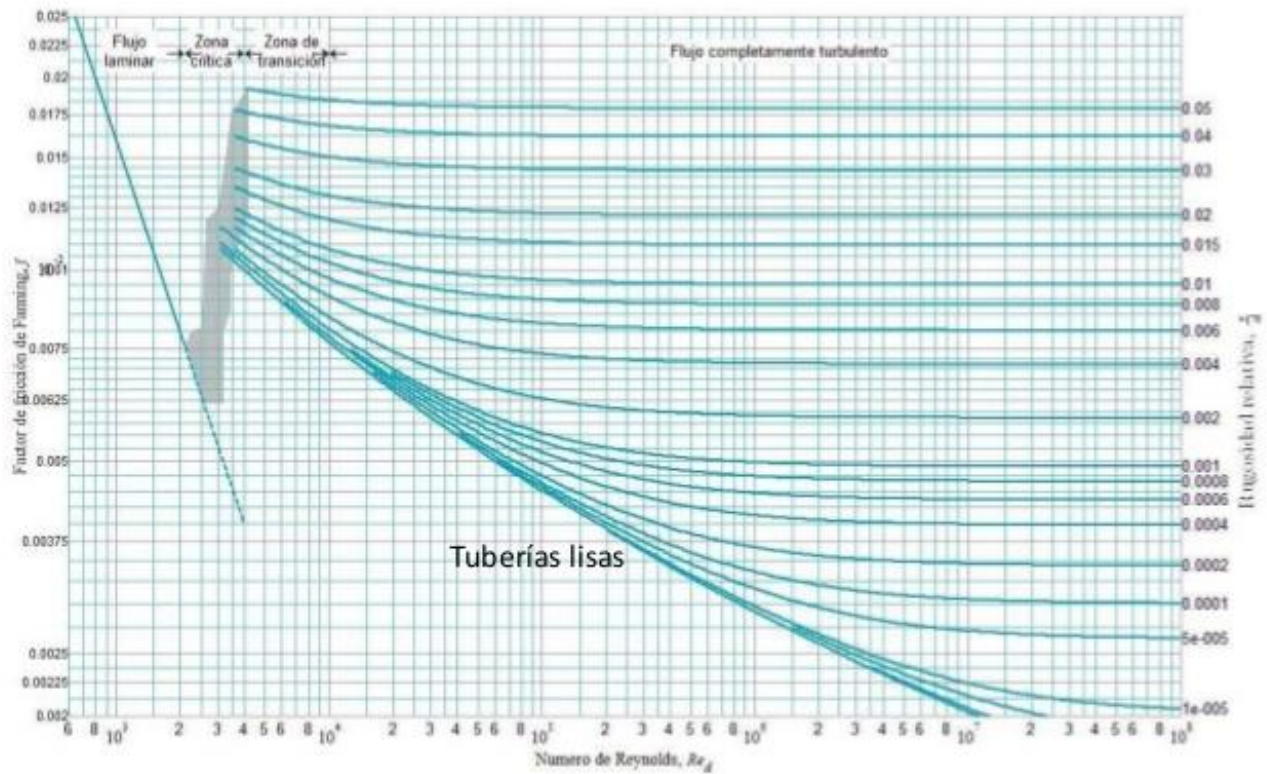


Ilustración 15: Representación del Diagrama de Moody (Fuente extraída de: <https://diagramaweb.com/moody/>).

Coeficiente f de Darcy - Weisbach

CAUDAL en Litros/Segundo

VISCOSIDAD CINEMÁTICA en metros cuadrados por segundo

DIÁMETRO en Milímetros

RUGOSIDAD ABSOLUTA en Milímetros

RESULTADO

COEFICIENTE DE FRICCIÓN HIDRÁULICA f Adimensional

RUGOSIDAD RELATIVA Adimensional

NO. DE REYNOLDS Adimensional

VELOCIDAD EN M/S

Ilustración 16: Programa de Visual Basic, para determinar el coeficiente de f .

TABLA 3.1 Rugosidad absoluta ϵ en tubos comerciales

Material	ϵ , en mm
<i>Tubos lisos</i>	
De vidrio, cobre, latón, madera (bien cepillada), acero nuevo soldado y con una mano interior de pintura; tubos de acero de precisión sin costura, serpentines industriales, plástico, hule	0.0015
Tubos industriales de latón	0.025
Tubos de madera	0.2 a 1
Hierro forjado	0.05
Hierro fundido nuevo	0.25
Hierro fundido, con protección interior de asfalto	0.12
Hierro fundido oxidado	1 a 1.5
Hierro fundido, con incrustaciones	1.5 a 3
Hierro fundido, centrifugado	0.05
Hierro fundido nuevo, con bridas o juntas de macho y campana	0.15 a 0.3
Hierro fundido usado, con bridas o juntas de macho y campana	2 a 3.5
Hierro fundido para agua potable, con bastantes incrustaciones y diámetro de 50 a 125 mm	1 a 4
Hierro galvanizado	0.15
Acero rolado, nuevo	0.05
Acero laminado, nuevo	0.04 a 0.1
Acero laminado con protección interior de asfalto	0.05
<i>Tubos de acero soldado de calidad normal</i>	
Nuevo	0.05 a 0.10
Limpiado después de mucho uso	0.15 a 0.20
Moderadamente oxidado, con pocas incrustaciones	0.4
Con muchas incrustaciones	3
Con remaches transversales, en buen estado	0.1
Con costura longitudinal y una línea transversal de remaches en cada junta, o bien laqueado interiormente	0.3 a 0.4
Con líneas transversales de remaches, sencilla o doble; o tubos remachados con doble hilera longitudinal de remaches e hilera transversal sencilla, sin incrustaciones	0.6 a 0.7
Acero soldado, con una hilera transversal sencilla de pernos en cada junta, laqueado interior, sin oxidaciones, con circulación de agua turbia	1

Ilustración 17: Coeficientes de rugosidad absoluta.

TABLA 2

DENSIDAD RELATIVA Y VISCOSIDAD CINEMATICA DE ALGUNOS LIQUIDOS

(Viscosidad cinemática = valor de la tabla $\times 10^{-6}$)

Temp. °C	Agua**		Disolvente comercial		Tetracloruro de carbono		Aceite lubricante medio	
	Densid. relat.	Visc. cinem. m ² /seg	Densid. relat.	Visc. cinem. m ² /seg	Densid. relat.	Visc. cinem. m ² /seg	Densid. relat.	Viscos. cinem. m ² /seg
5	1,000	1,520	0,728	1,476	1,620	0,763	0,905	471
10	1,000	1,308	0,725	1,376	1,608	0,696	0,900	260
15	0,999	1,142	0,721	1,301	1,595	0,655	0,896	186
20	0,998	1,007	0,718	1,189	1,584	0,612	0,893	122
25	0,997	0,897	0,714	1,101	1,572	0,572	0,890	92
30	0,995	0,804	0,710	1,049	1,558	0,531	0,886	71
35	0,993	0,727	0,706	0,984	1,544	0,504	0,883	54,9
40	0,991	0,661	0,703	0,932	1,522	0,482	0,875	39,4
50	0,990	0,556					0,866	25,7
65	0,980	0,442					0,865	15,4

Ilustración 18: Tabla de viscosidad cinemática.

Table 2.6 Minor loss coefficients

Fitting	K_L	Fitting	K_L
Pipe entrance		90° smooth bend	
Bellmouth	0.03-0.05	Bend radius/D = 4	0.16-0.18
Rounded	0.12-0.25	Bend radius/D = 2	0.19-0.25
Sharp-edged	0.50	Bend radius/D = 1	0.35-0.40
Projecting	0.78	Mitered bend	
Contraction - sudden		$\theta = 15^\circ$	0.05
$D_2/D_1=0.80$	0.18	$\theta = 30^\circ$	0.10
$D_2/D_1=0.50$	0.37	$\theta = 45^\circ$	0.20
$D_2/D_1=0.20$	0.49	$\theta = 60^\circ$	0.35
Contraction - conical		$\theta = 90^\circ$	0.80
$D_2/D_1=0.80$	0.05	Tee	
$D_2/D_1=0.50$	0.07	Line flow	0.30-0.40
$D_2/D_1=0.20$	0.08	Branch flow	0.75-1.80
Expansion - sudden		Tapping T Branch	
$D_2/D_1=0.80$	0.16	$d =$ tapping hole diameter	$1.97(d/D)^2$
$D_2/D_1=0.50$	0.57	$D =$ main line diameter	
$D_2/D_1=0.20$	0.92	Cross	
Expansion - conical		Line flow	0.50
$D_2/D_1=0.80$	0.03	Branch flow	0.75
$D_2/D_1=0.50$	0.08	45° Wye	
$D_2/D_1=0.20$	0.13	Line flow	0.30
Gate valve - open	0.39	Branch flow	0.50
3/4 open	1.10	Check valve - conventional	4.0
1/2 open	4.8	Check valve - clearway	1.5
1/4 open	27	Check valve - ball	4.5
Globe valve - open	10	Cock - straight through	0.5
Angle valve - open	4.3	Foot valve - hinged	2.2
Butterfly valve - open	1.2	Foot valve - poppet	12.5

WALSH (1984)

$$K_L = C_f D^4 / C_v^2 \quad (2.25)$$

where D = diameter (in., m)
 C_v = valve coefficient [gpm/(psi)^{0.5}, (m³/s)/(kPa)^{0.5}]
 C_f = unit conversion factor (880 English, 1.22 SI)

Ilustración 19: Coeficientes de pérdidas menores.

TABLA 3-Distribución Chi Cuadrado χ^2

P = Probabilidad de encontrar un valor mayor o igual que el chi cuadrado tabulado, v = Grados de Libertad

v/p	0,001	0,0025	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
1	10,8274	9,1404	7,8794	6,6349	5,0239	3,8415	2,7055	2,0722	1,6424	1,3233	1,0742	0,8735	0,7083	0,5707	0,4549
2	13,8150	11,9827	10,5965	9,2104	7,3778	5,9915	4,6052	3,7942	3,2189	2,7726	2,4079	2,0996	1,8326	1,5970	1,3863
3	16,2660	14,3202	12,8381	11,3449	9,3484	7,8147	6,2514	5,3170	4,6416	4,1083	3,6649	3,2831	2,9462	2,6430	2,3660
4	18,4662	16,4238	14,8602	13,2767	11,1433	9,4877	7,7794	6,7449	5,9886	5,3853	4,8784	4,4377	4,0446	3,6871	3,3567
5	20,5147	18,3854	16,7496	15,0863	12,8325	11,0705	9,2363	8,1152	7,2893	6,6257	6,0644	5,5731	5,1319	4,7278	4,3515
6	22,4575	20,2491	18,5475	16,8119	14,4494	12,5916	10,6446	9,4461	8,5581	7,8408	7,2311	6,6948	6,2108	5,7652	5,3481
7	24,3213	22,0402	20,2777	18,4753	16,0128	14,0671	12,0170	10,7479	9,8032	9,0371	8,3834	7,8061	7,2832	6,8000	6,3458
8	26,1239	23,7742	21,9549	20,0902	17,5345	15,5073	13,3616	12,0271	11,0301	10,2189	9,5245	8,9094	8,3505	7,8325	7,3441
9	27,8767	25,4625	23,5893	21,6660	19,0228	16,9190	14,6837	13,2880	12,2421	11,3887	10,6564	10,0060	9,4136	8,8632	8,3428
10	29,5879	27,1119	25,1881	23,2093	20,4832	18,3070	15,9872	14,5339	13,4420	12,5489	11,7807	11,0971	10,4732	9,8922	9,3418
11	31,2635	28,7291	26,7569	24,7250	21,9200	19,6752	17,2750	15,7671	14,6314	13,7007	12,8987	12,1836	11,5298	10,9199	10,3410
12	32,9092	30,3182	28,2997	26,2170	23,3367	21,0261	18,5493	16,9893	15,8120	14,8454	14,0111	13,2661	12,5838	11,9463	11,3403
13	34,5274	31,8830	29,8193	27,6882	24,7356	22,3620	19,8119	18,2020	16,9848	15,9839	15,1187	14,3451	13,6356	12,9717	12,3398
14	36,1239	33,4262	31,3194	29,1412	26,1189	23,6848	21,0641	19,4062	18,1508	17,1169	16,2221	15,4209	14,6853	13,9961	13,3393
15	37,6978	34,9494	32,8015	30,5780	27,4884	24,9958	22,3071	20,6030	19,3107	18,2451	17,3217	16,4940	15,7332	15,0197	14,3389
16	39,2518	36,4555	34,2671	31,9999	28,8453	26,2962	23,5418	21,7931	20,4651	19,3689	18,4179	17,5646	16,7795	16,0425	15,3385
17	40,7911	37,9462	35,7184	33,4087	30,1910	27,5871	24,7690	22,9770	21,6146	20,4887	19,5110	18,6330	17,8244	17,0646	16,3382
18	42,3119	39,4220	37,1564	34,8052	31,5264	28,8693	25,9894	24,1555	22,7595	21,6049	20,6014	19,6993	18,8679	18,0860	17,3379
19	43,8194	40,8847	38,5821	36,1908	32,8523	30,1435	27,2036	25,3289	23,9004	22,7178	21,6891	20,7638	19,9102	19,1069	18,3376
20	45,3142	42,3358	39,9969	37,5663	34,1696	31,4104	28,4120	26,4976	25,0375	23,8277	22,7745	21,8265	20,9514	20,1272	19,3374
21	46,7963	43,7749	41,4009	38,9322	35,4789	32,6706	29,6151	27,6620	26,1711	24,9348	23,8578	22,8876	21,9915	21,1470	20,3372
22	48,2676	45,2041	42,7957	40,2894	36,7807	33,9245	30,8133	28,8224	27,3015	26,0393	24,9390	23,9473	23,0307	22,1663	21,3370
23	49,7276	46,6231	44,1814	41,6383	38,0756	35,1725	32,0069	29,9792	28,4288	27,1413	26,0184	25,0055	24,0689	23,1852	22,3369
24	51,1790	48,0336	45,5584	42,9798	39,3641	36,4150	33,1962	31,1325	29,5533	28,2412	27,0960	26,0625	25,1064	24,2037	23,3367
25	52,6187	49,4351	46,9280	44,3140	40,6465	37,6525	34,3816	32,2825	30,6752	29,3388	28,1719	27,1183	26,1430	25,2218	24,3366
26	54,0511	50,8291	48,2898	45,6416	41,9231	38,8851	35,5632	33,4295	31,7946	30,4346	29,2463	28,1730	27,1789	26,2395	25,3365
27	55,4751	52,2152	49,6450	46,9628	43,1945	40,1133	36,7412	34,5736	32,9117	31,5284	30,3193	29,2266	28,2141	27,2569	26,3363
28	56,8918	53,5939	50,9936	48,2782	44,4608	41,3372	37,9159	35,7150	34,0266	32,6205	31,3909	30,2791	29,2486	28,2740	27,3362
29	58,3006	54,9662	52,3355	49,5878	45,7223	42,5569	39,0875	36,8538	35,1394	33,7109	32,4612	31,3308	30,2825	29,2908	28,3361

Ilustración 20: Tabla de valores de Ji cuadrada (Fuente extraída de: <https://www.monografias.com/trabajos-pdf5/prueba-chi-cuadrada-estadistica/prueba-chi-cuadrada-estadistica>).