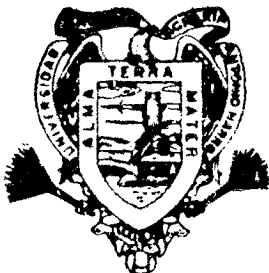


VARIABILIDAD ESPACIAL EN VARIABLES
GEOHIDROLOGICAS

JAVIER DE JESUS CORTES BRACHO

T E S I S

PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL
PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS
EN ESTADISTICA EXPERIMENTAL



Universidad Autónoma Agraria
Antonio Narro

PROGRAMA DE GRADUADOS

Buena Vista, Saltillo, Coah.


Mayo de 1988

Tesis elaborada bajo la supervisión del comité particular
de asesoría y aprobada como requisito parcial, para optar
al grado de

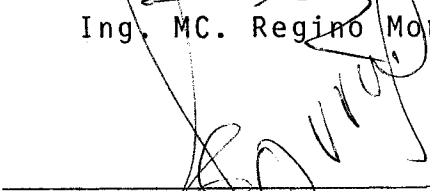
MAESTRO EN CIENCIAS EN
ESTADISTICA EXPERIMENTAL

C O M I T E P A R T I C U L A R


Asesor principal:

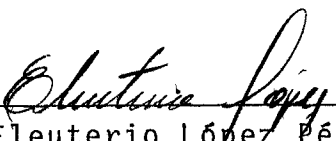

Ing. M.C. Regino Morones Reza

Asesor:

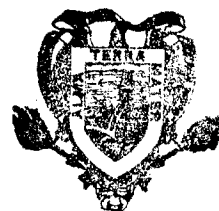

Lic. M.C. Emilio Padrón Corral

Asesor:


Ing. M.C. Alejandro Zermeño González


Dr. Eleuterio López Pérez
Subdirector de Asuntos de Postgrado

Universidad Autónoma Agraria
"ANTONIO NARRO"



BIBLIOTECA

Buenavista, Saltillo, Coahuila. Mayo 1988.

AGRADECIMIENTOS

Al M.C. Regino Morones Reza, por su valiosa asesoría en el desarrollo de mi programa de graduados y su apoyo incondicional para que este trabajo saliera adelante.

Al M.C. Emilio Padrón Corral, por su asesoría y apoyo constante a esta tesis.

Al M.C. Alejandro Zermeño González, quien marcó la dirección y rumbo que en aspecto técnico debería seguir el presente trabajo.

Al Dr. Juan Francisco Pissani Zúñiga, por su apoyo tenaz y constante en todo mi programa de graduados y sus positivas aportaciones al presente.

Al Dr. Rolando Cavazos Cadena, por los imprescindibles conceptos adquiridos en sus cursos de Teoría Estadística.

Al M.C. Félix Sánchez Pérez, por sus comentarios hacia esta tesis y por los conceptos adquiridos en los cursos de Métodos Estadísticos y Muestreo.

Y un profundo agradecimiento a Carmen Leticia Ayala, por su magnífico trabajo mecanográfico.

DEDICATORIA

Con cariño y respeto a mis padres: Sr. Efraín Cortés -
Yeverino y Sra. María del Refugio Bracho de Cortés.

Con amor y ternura a mi esposa Manuela y a mis hijos: -
Javier de Jesús, Angélica Elizabeth y Norma.

Con verdadero afecto a mis hermanas: María del Rosario
y Juana Antonieta.

y con aprecio a la Universidad Autónoma Agraria Antonio
Narro.

COMPENDIO

Variabilidad Espacial en Variables Geohidrológicas

Por

JAVIER DE JESUS CORTES BRACHO

MAESTRIA EN
ESTADISTICA EXPERIMENTAL

UNIVERSIDAD AUTONOMA AGRARIA ANTONIO NARRO
BUENAVISTA, SALTILLO, COAHUILA. MAYO 1988

M.C. Regino Morones Reza. - Asesor -

Palabras claves: variabilidad espacial, variables regionalizadas, interpolación Kriging, nivel freático, nivel dinámico, interpolación Cokriging

El método Kriging proporciona un estimador insesgado si la suma de las ponderaciones por las que se multiplican las observaciones medidas es igual a uno y de varianza mínima, si ésta es minimizada por un proceso de multiplicadores de Lagrange. En el presente trabajo se demuestra lo anterior incluyendo a la estimación Cokriging y se proporciona una metodología para el uso de la interpolación Kriging apoyándose en observaciones de niveles freáticos y niveles dinámicos. - La metodología consiste en:

a) Muestreo. Tomar información de una cuadrícula -

previamente realizada para el caso de observaciones regularmente espaciadas o tomar información aprovechando infraestructura o características visuales bien definidas y establecidas al azar, para observaciones irregularmente espaciadas.

b) Cálculo de semivariogramas. Para cada caso de observaciones regular o irregularmente espaciadas, realizar la estimación de la semivarianza y ajustar el mejor modelo teórico, el cual determina si existe dependencia espacial entre las observaciones.

c) Interpolación Kriging. Si existe dependencia espacial entre las observaciones, aplicar la interpolación Kriging para la estimación del valor de las variables en estudio, en localidades no medidas.

d) Estimación del Error. Al aplicar iterativamente la interpolación Kriging, para localidades medidas, se encuentran los errores reducidos, a los cuales se les puede probar las hipótesis: Que son distribuidos normal, con media cero y varianza uno.

ABSTRACT

SPATIAL VARIABILITY IN GEOHYDROLOGICAL VARIABLES

By

JAVIER DE JESUS CORTES BRACHO

MASTER OF SCIENCE
EXPERIMENTAL STATISTICS

UNIVERSIDAD AUTONOMA AGRARIA ANTONIO NARRO
BUENAVISTA, SALTILLO, COAHUILA. MAY 1988

M.C. Regino Morones Reza. - Advisor -

Key words: spatial variability, regionalized variables, Kriging interpolation, water table, pumping level, Cokriging interpolation.

Kriging method gives a unbiased estimator if, the amount of the weights by it's multiply the measures observations is equal to one and minimum variance if it is minimized by a process of Lagrangian multiplier. This work show the anterior inclosing Cokriging estimation and offers a methodology for the use of the Kriging interpolation supported in observations of water table and pumping level. The methodology contains:

a) Sampling. To get information of one grid realized previously for the case of observations regularly spaced

or to get information becoming substructure or visual characteristic good definite and established at random for observations irregularly spaced.

b) Semivariograms calculation. For each case of observations regularly or irregularly spaced, to realize the estimation of the semivariance and adjust the best theoretical model, which determine if by chance exist dependence spatial between the observations.

c) Kriging interpolation. If by chance exist dependence spatial between the observations, to apply the Kriging interpolation for the estimation of the value of the variables in study, in locations not measurements.

d) Error estimation. On apply iteratively the Kriging interpolation, for locations measurements, it's meet the reduced errors to which itself can test the hypothesis: that are distribution normal, with mean zero and variance one.

INDICE DE CONTENIDO

	Página
INDICE DE CUADROS	xi
INDICE DE FIGURAS	xii
INTRODUCCION	1
REVISION DE LITERATURA	3
ANTECEDENTES SOBRE VARIABILIDAD ESPACIAL.	3
SOPORTE TEORICO DE LA VARIABILIDAD ESPACIAL	8
TEORIA DE LAS VARIABLES REGIONALIZA	
DAS	8
KRIGING UNIVERSAL	15
COKRIGING	20
ESTIMACION DEL ERROR	23
APLICACION DE LA VARIABILIDAD ESPACIAL	26
ALGUNOS CONCEPTOS SOBRE ALGEBRA LINEAL	33
MATERIALES Y METODOS	37
DEFINICION Y SUPOSICIONES	37
ESTIMACION DE UNA OBSERVACION	39
PARA UNA OBSERVACION NO MEDIDA $z(x_0)$	39
PARA UNA OBSERVACION MEDIDA $z(x_p)$	41
VARIANZA DE UNA ESTIMACION	43
VARIANZA DE LA DIFERENCIA DE UNA OB	
SERVACION NO MEDIDA Y SU ESTIMADOR.	43
VARIANZA DE LA DIFERENCIA DE UNA OB	
SERVACION MEDIDA Y SU ESTIMADOR	45
PROCEDIMIENTO PARA LA INTERPOLACION KRIGING	50
MUESTREO	50
SEMIVARIOGRAMAS	53
INTERPOLACION KRIGING	55
ESTIMACION DEL ERROR	57
RESULTADOS Y DISCUSION	59
SEMIVARIOGRAMAS	59
OBSERVACIONES REGULARMENTE ESPACIA-	
DAS	59

OBSERVACIONES IRREGULARMENTE ESPA -	
CIADAS	62
INTERPOLACION KRIGING	66
OBSERVACIONES REGULARMENTE ESPACIA -	
DAS	66
OBSERVACIONES IRREGULARMENTE ESPACIA	
DAS	74
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	79
RESUMEN	81
LITERATURA CITADA	83
APENDICES	90
A. ASUNCIONES ESTACIONARIAS	91
B. EL ESTIMADOR KRIGING ES UN ESTIMADOR INSES	
GADO Y DE VARIANZA MINIMA	97
C. SEMIVARIOGRAMAS, CONTRASEMIVARIOGRAMAS, -	
INSEGAMIENTO Y VARIANZA MINIMA EN LA ES	
TIMACION COKRIGING	104

INDICE DE CUADROS

Cuadro No.		Página
3.1.	Datos de profundidad en metros de nivel freático $Z(x_i)$, en diciembre de 1980, en el Ejido Parras	51
3.2	Profundidad de niveles dinámicos en metros - medidos en noviembre de 1987 en pozos de SAPAC y UAAAN	53
4.1	Distancias y $\hat{\gamma}(h)$ calculados para niveles - freáticos de diciembre de 1980, en el Ejido Parras	60
4.2	Distancias y $\hat{\gamma}(h)$ calculados para profundidades de niveles dinámicos de los pozos de SAPAC y UAAAN	64
4.3	Errores reducidos al aplicar la metodología - Kriging para observaciones de nivel freático	72
4.4	Errores reducidos al aplicar la metodología - Kriging para observaciones de niveles dinámicos	77

INDICE DE FIGURAS

Figura No.		Página
2.1	Semivariograma. Rango a es la distancia don de $\hat{\gamma}(h) + \epsilon = \text{umbral}$	13
2.2	Modelos de semivariogramas teóricos	16
3.1	Profundidad del nivel freático (m) en diciem bre de 1980 en el Ejido Parras.	52
3.2	Localización de los pozos de producción de - agua para observaciones de niveles dinámicos	54
3.3	Direcciones de cálculo del semivariograma .	55
3.4	Diagrama de flujo para la interpolación Kri- ging	56
4.1	Semivariograma teórico ajustado para observa ciones de nivel freático	63
4.2	Semivariograma teórico ajustado para observa ciones de niveles dinámicos	67

INTRODUCCION

Las condiciones hidrodinámicas de un medio están en función de las características del medio y de las propiedades del fluido, estas últimas pueden ser conocidas en un análisis adecuado del fluido. Sin embargo, para determinar las características del medio por el cual circula, se apoyaría en la técnica del muestreo, de tal forma que si se quisiera mejorar la calidad de las estimaciones en toda la trayectoria del medio, se tendría que aumentar el número de observaciones, repercutiendo en un mayor costo y tiempo de análisis. Este problema se extiende a diferentes áreas de investigación en las que conociendo ciertos valores de variables medidas en puntos determinados, se quisiera estimar valores de las variables en puntos no medidos dentro del espacio de exploración de la variable. Así, es la intención de este trabajo mostrar una metodología para obtener una interpolación óptima considerando la variabilidad espacial de las variables en estudio; y como un primer intento de explicar el comportamiento en acuíferos calcáreos cuyo análisis es más complejo que los acuíferos granulares, es por eso que se formula el siguiente objetivo:

Plantear la metodología del uso de variables regionalizadas y el método de Interpolación Kriging para la estimación de valores de variables geohidrológicas. Al mismo tiempo, se contempla la discusión de las siguientes hipótesis:

H_0 : Los valores estimados en alguna posición dentro del espacio de exploración utilizando el método Kriging, son insesgados y con varianza mínima.

H_0 : Los errores reducidos se distribuyen normal con media, m_R , cero y varianza, σ_R^2 , uno.

REVISION DE LITERATURA

Antecedentes Sobre Variabilidad Espacial

Señalan Yost y Fox (1981) que en los intentos de clasificación de suelos a grupos de suelos que tienen propiedades similares, un solo pozo agrológico destinado a clasificar los suelos, resulta insuficiente dado que existe gran variación de las propiedades del suelo dentro de las categorías taxonómicas. Mencionan que colectaron 80 muestras de suelo de las Islas de Hawaii y analizaron: fósforo, pH y cationes intercambiables; donde la capacidad de la taxonomía de suelos para predecir variación en estas propiedades, fue examinada mediante dos formas: la primera consistió en particionar categorías simples mediante medidas aproximadas, y la segunda mediante un análisis jerárquico de varianzas patrón. En ambos casos, encontraron una gran variación en las propiedades químicas de las 80 muestras de suelo, agrupándolas en cuatro grandes grupos.

En la práctica del muestreo se ha encontrado que los valores de ciertas variables tienen una dependencia espacial,

Peck *et al.* (1977) apreciaron variabilidad espacial de las propiedades del suelo relacionadas con las características suelo-agua en una área con vegetación de bosque, usando un modelo de colección de agua en una cuenca al oriente de Tennessee. La metodología desarrollada mencionan que puede ser aplicada para investigar problemas de suelo-planta-clima. También Cameron *et al.* (1979) monitorearon concentraciones de nitrato (NO_3), nitrógeno (N), y cloruro (Cl), durante tres años en un estudio de campo para examinar factores afectados por variabilidad, en parcelas de control fertilizadas establecidas en cada año. Fueron muestreadas un mínimo de ocho veces a través del año y realizaron análisis individuales en cada muestreo. Encontraron en otoño y primavera rangos diferenciales de lixiviación de NO_3 , N y Cl, contribuyendo significativamente al incremento en la variabilidad. Dichos patrones de lixiviación los atribuyeron a:

- a) Variabilidad de propiedades físicas para determinar almacenaje del agua y transporte.
- b) Puntos diferentes de redistribución de arribo de agua de lluvia debido a diferencias en microrelieve de superficie.

Analizaron Lanyon y Hall (1981) las propiedades físicas y químicas de un suelo morfológico a través de una sección de una cuenca de drenaje en el este de Ohio. La evaluación fue por análisis de autocorrelación para estimar el promedio de magnitud de intervalos de dependencia mutua de

observaciones hechas cada 20 metros a lo largo de la sección. Señalan que en la interpretación de los resultados de autocorrelación en estudios pedológicos, necesita desarrollos futuros, énfasis en la continuidad y ordenamiento natural del suelo y considerar el hecho de que las observaciones relacionadas espacialmente, pueden ser mutuamente dependientes. Esto coincide con lo que menciona Cochran (1981) que en muchas poblaciones naturales hay razón para esperar que dos observaciones x_i , x_j serán más semejantes cuando i y j sean cercanas en la serie que cuando ocupen posiciones distantes entre sí. Esto ocurrirá siempre que haya fuerzas naturales que induzcan un cambio lento al recorrer la serie. En un modelo matemático para este efecto, es posible suponer que x_i , x_j están positivamente correlacionados, siendo su correlación función solamente de su separación, $i - j$, que disminuye al crecer la distancia. Aunque este modelo está sobresimplificado, puede representar uno de los rasgos sobresalientes de muchas poblaciones naturales. Para investigar si este modelo se aplica a una población, se puede calcular el conjunto de correlaciones (ρ_u) para pares de atributos que distan u unidades y graficar la correlación respecto a u . Esta curva o la función que representa se llama Correlograma. Aunque el modelo sea válido, el correlograma no será una función suave para una población finita cualquiera, debido a las irregularidades que causa la finitud de la población. Así se tiene por ejemplo que Bresler *et al.* (1981) trabajaron en un campo heterogéneo en el cual las propiedades

suelo-agua y la misma producción de una cosecha pueden ser diferentes de punto a punto. Usando la variabilidad actual de datos de producción de cacahuete (*Arachis hipogaea* L.) los efectos de variabilidad espacial del suelo-agua sobre la distribución de la cosecha producida y sobre la estructura de la correlación espacial fueron evaluados. Valores del total de producción de materia seca (junto con dos adicionales aspectos de cosecha, producción de vaina y heno), contenido de agua en el suelo (antes y después de la irrigación) y conductividad saturada, fueron usados para estimar distribuciones tipo (normal o log normal) y sus momentos. Los resultados y cálculos de correlaciones cruzadas entre producción de cosecha y componentes suelo-agua, fueron usados para establecer una relación aproximada entre la producción de cosecha y las variables suelo-agua, consideradas como variables espacialmente aleatorias.

Señalan Vieira *et al.* (1983) que en problemas agronómicos el procedimiento de muestreo puede crear alguna confusión y sesgo en los análisis y mencionan que la Geoestadística proporciona un método para el análisis del espacio y propiedades temporales en un determinado dato y un método de interpolación entre puntos seleccionados. Así, la Geoestadística considera una serie de datos recabados en cualquier espacio o tiempo a intervalos discretos. Estas muestras pueden ser correlacionadas mutuamente (unas a otras) para proporcionar alguna información única acerca de los parámetros los cuales podrían no ser detectados con los clásicos métodos

estadísticos,

En resumen, se puede decir que la inquietud de muchos investigadores sobre problemas de variabilidad, data desde principios de 1900 (Montgomery, 1913; Robinson y Lloyd, 1915; Pendleton, 1919). En experimentos de campo muy cuidadosos que realizaron para determinar los efectos de la variabilidad del suelo sobre parcelas de campo (Montgomery, 1913; Smith, 1910), nitrificación (Waynick, 1918) y nitrógeno y carbono (Waynick y Sharp, 1919); una diversidad de proyectos de muestreo fueron usados de tal manera que mostraban máxima aplicación sobre el campo con las distancias entre las observaciones conocidas, en la actualidad, uno de los problemas que se tiene en diversas áreas de investigación es la extrapolación de los valores de una variable conocida en unos puntos específicos hacia otros puntos dentro del espacio de explotación. Comenta Roman (1980) que los problemas de la calidad de la estimación de las variables de distribución geográfica se plantearon por primera vez en la Escuela de Minas de París, en donde el matemático francés George Matheron y un grupo de sus discípulos se abocaron a la solución del problema, obteniendo la metodología que aporta una estimación óptima de los valores de una variable, pudiéndose extender su aplicación a una gran cantidad de áreas de investigación, la metodología recibe el nombre de Kriging; este término lo propuso G. Matheron en honor a D.G. Krige, Ingeniero en Minas, quien fue el primero en introducir el uso de los promedios móviles (1950). El Método Kriging es un método de

interpolación con un estimador lineal e insesgado de varianza mínima.

Así, la variabilidad espacial será la variación existente entre los valores de las variables en función del espacio y el tiempo, y el método de interpolación Kriging es un método que toma en cuenta a la variabilidad espacial.

Soporte Teórico de la Variabilidad Espacial

Teoría de las Variables Regionalizadas

Se mencionó anteriormente que el Método de Interpolación Kriging toma en cuenta la variabilidad espacial, así lo señala Matheron (1963, 1971) cuando desarrolló una teoría a la que llamó "Teoría de las Variables Regionalizadas", la cual describe los fundamentos de la Geoestadística. En esta teoría, una variable regionalizada es una función del espacio numérico la cual varía de un lugar a otro con aparente continuidad y de tal manera que no puede ser generalmente representada por una función ordinaria. El método de interpolación Kriging se basa sobre la teoría de las variables regionalizadas.

Paralelamente se ha desarrollado otro método de estimación llamado Cokriging, el cual menciona Vieira, et al (1983) es particularmente útil cuando una variable es más difícil a medir que las otras variables y, consecuentemente, tiene menos observaciones con las cuales es contracorrelacionada. Las derivaciones completas del sistema Cokriging es dado por Journel y

Huijbregts (1978) para un número genérico de variables definidas en espacio tridimensional.

De acuerdo con Viera *et al.* (1983) si se considera un campo de área S para el cual se tienen medidas de una serie de n valores $\{z(x_i), i = 1, 2, \dots, n\}$ en el cual cada x_i identifica una posición en coordenadas la que puede ser en cualquier espacio o tiempo; por simplicidad de presentación, se restringirá la discusión únicamente al espacio. Cada x_i representa un par de coordenadas (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$; y cada $z(x_k)$ puede ser considerada una realización particular de una cierta variable aleatoria $z(x_k)$, para un particular punto determinado x_k . La variable regionalizada $z(x_i)$, para todo x_i dentro de S puede ser considerada una realización de una serie de variables aleatorias $\{z(x_i), \text{ para toda } x_i \text{ dentro de } S\}$. Esta serie de variables aleatorias es llamada función aleatoria y es escrita $z(x_i)$ (Journel y Huijbregts, 1978).

Uno de los métodos para estimación de espacio o tiempo en dependencia entre observaciones vecinas es a través de autocorrelación. Este método, el cual tiene sus orígenes en análisis de series de tiempo, ha sido usado intensamente en la ciencia del suelo (Webster, 1973; Webster y Cuanalo, 1975; Viera *et al.* 1981). Porque es una medida de dependencia entre

muestras vecinas y tiene importantes aplicaciones tales como la localización de límites de suelo (Webster, 1973) y en el diseño de proyectos de muestreo para medidas en una dirección (Vieria *et al.* 1981). Cuando las observaciones son distribuidas bidimensionalmente en cruz en una superficie de campo, funciones de autocovarianza bidimensional son usadas para averiguar la dependencia espacial. Sin embargo, cuando la interpolación entre medidas es necesaria, una herramienta más adecuada para la medida de la correlación es el semivariograma (el desarrollo matemático se presenta en el Apéndice A) el cual es definido como sigue:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} E\{ [Z(x_i) - Z(x_i + h)]^2 \} \quad (1)$$

El cual puede ser estimado por:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} [Z(x_i) - Z(x_i + h)]^2 \quad (2)$$

Donde E es el valor esperado y N(h) es el número de pares de observaciones $[Z(x_i), Z(x_i + h)]$ separados por una distancia o un vector de desplazamiento h (Journel y Huijberts, 1978). La ecuación (2) es útil para estimaciones cuando los datos se encuentran en una línea recta o en una cuadrícula regular. Sin embargo, cuando los datos se encuentran espaciados irregularmente y los cuales pueden ser agrupados en intervalos de distancias y ángulos, la estimación del semivariograma está dada por:

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{\sum_{i=1}^N (h) [z(x_i) - z(x_i + h)]^2}{2 \sum_{i=1}^N (h_i)} \quad (3)$$

Donde h será el intervalo de distancia que agrupa a las observaciones $[z(x_i), z(x_i + h)]$ y h_i será cada distancia entre las observaciones $[z(x_i), z(x_i + h_i)]$ (Ramírez, 1980).

A la representación gráfica de $\hat{\gamma}(h)$ contra los valores correspondientes de h es llamada un semivariograma. Es de este modo una función del vector h , es decir, dependen de la magnitud y dirección de h . Cuando los semivariogramas para diferentes direcciones son diferentes, el fenómeno físico bajo estudio es anisotrópico, y semivariogramas anisotrópicos deben ser sometidos a alguna transformación que hará de ellos isotrópicos. Esto es descrito por Journel y Huijbregts (1978), y Burgess y Webster (1980b).

La gráfica del semivariograma experimental calculado usando las ecuaciones (2) o (3) mostrará una serie de puntos discretos correspondientes a cada valor de h , así, una función continua $\hat{z}(h)$ debe ser ajustada. Delhomme (1978) discute algunos modelos teóricos para esta función y que son aplicables a diferentes fenómenos, se analizarán más adelante.

Se espera que las diferencias $[z(x_i) - z(x_i + h)]$ disminuyan cuando h la magnitud de la separación entre ellas disminuye, así, observaciones más cercanas son esperadas para ser más semejantes que observaciones separadas por grandes

distancias. Para un proceso de estacionaridad de segundo orden (las asunciones de estacionaridad se contemplan en el Apéndice A), $\gamma(0) = 0$, así se plantea en la ecuación (2) y (3). Sin embargo, en la práctica (Delhomme, 1978; Campbell, 1978; Hajrasuliha *et al.*, 1980; Burgess y Webster, 1980a), cuando h se aproxima a cero, $\hat{\gamma}(h)$ aproxima a un valor positivo llamado Efecto Nugget (C_0). Este valor revela la discontinuidad del semivariograma cerca del origen a distancias menores que las pruebas más cortas de distancia de muestreo. La discontinuidad puede ser debida a variabilidad de escalas más cortas que las distancias de muestreo o a errores en la medición (Delhomme, 1978).

Un modelo teórico apropiado para el semivariograma experimental es uno de los aspectos más importantes de la aplicación de la teoría de las variables regionalizadas y suele ser una de las mayores fuentes de ambigüedad de estas aplicaciones, en vista de que todos los cálculos dependen sobre los valores del semivariograma para distancias específicas (Vieira *et al.*, 1981).

Dependiendo del comportamiento del semivariograma, el modelo a ser usado puede ser clasificado en dos categorías:

Modelos con Umbral y sin Umbral

1. Modelos con umbral o modelos transición. Si h se incrementa desde cero, $\hat{\gamma}(h)$ incrementa arriba de un cierto valor correspondiente de h , sea α este valor, después el cual permanece básicamente constante. El valor de $\hat{\gamma}(h)$ en

este punto es aproximadamente igual a la varianza de las observaciones y es llamado el umbral C , y la distancia, a , es llamada el rango (Figura 2.1).

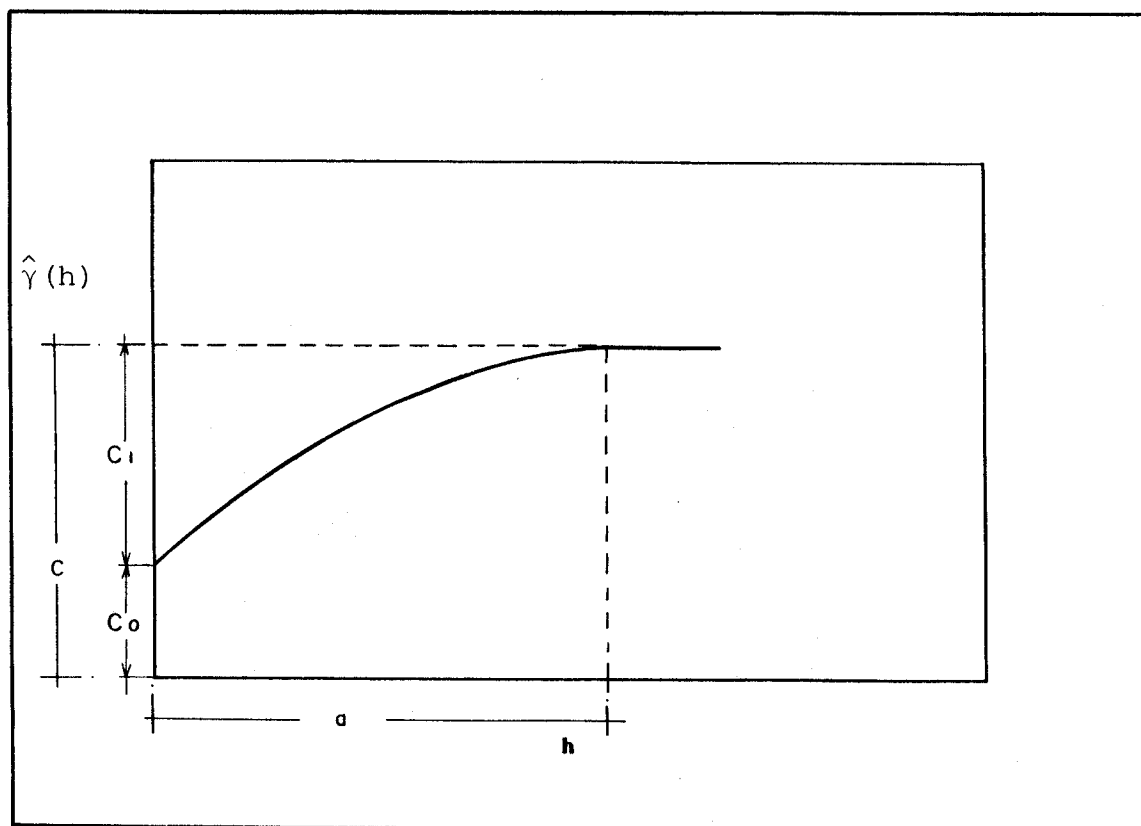


Figura 2.1. Semivariograma. Rango a es la distancia donde $\hat{\gamma}(h) + \varepsilon = \text{umbral}$. (Tomado de Vieira *et al.* 1983).

Cuando el rango a , es más pequeño que las distancias cercanas de muestreo, se tiene un Efecto Nugget puro y el fenómeno físico tiene una distribución espacial completamente al azar con respecto al espacio de muestreo disponible; los métodos clásicos estadísticos pueden ser aplicados. Sin embargo, si muchas muestras son tomadas de espacios cercanos, el semivariograma puede dar a conocer alguna estructura. En realidad, la existencia de un Efecto Nugget puro es la única situación que admiten la teoría para uso de los métodos

estadísticos clásicos,

Básicamente, cuatro modelos teóricos están en uso: - lineal, esférico, exponencial y gaussiano. En las siguientes expresiones C_0 es el Efecto Nugget, C_1 es el valor al cual - las observaciones son independientes entre sí, $C = C_0 + C_1$ - es el umbral y a es el rango del semivariograma (Figura 2.2)

a) Lineal

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}(h) &= C_0 + Bh & 0 \leq h \leq a \\ \hat{\gamma}(h) &= C_0 + C_1 & h \geq a\end{aligned}\quad (4)$$

Donde B es la pendiente para $0 \leq h \leq a$

b) Esférico

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}(h) &= C_0 + C_1 \left[\frac{3}{2} \left(\frac{h}{a} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{a} \right)^3 \right] & 0 \leq h \leq a \\ \hat{\gamma}(h) &= C_0 + C_1 & h \geq a\end{aligned}\quad (5)$$

El modelo esférico es obtenido, seleccionando primero el Efecto Nugget, C_0 , y el valor del umbral $C = C_0 + C_1$. Donde una línea intercepta al eje de las ordenadas como C y la tangente a los puntos cerca del origen, obteniendo el umbral a una distancia $a' = \frac{2}{3} a$ de este modo, el rango es $a = \frac{3a'}{2}$. El modelo esférico procede linealmente arriba a aproximadamente $\frac{1}{3} a$.

c) Exponencial

$$\hat{\gamma}(h) = C_0 + C_1 \left[1 - \exp\left(-\frac{h}{a_0}\right) \right] \quad 0 \leq h \leq d \quad (6)$$

Donde \bar{d} es la distancia máxima sobre la cual el semivariograma es definido. El parámetro a_0 , es obtenido al tomar una tangente a los puntos cerca del origen. Interceptando al eje de las ordenadas en C_0 . El umbral es aproximadamente $a_0 = \frac{a}{3}$ donde a es el rango.

d) Gaussiano

$$\hat{\gamma}(h) = C_0 + C_1 \left[1 - \exp\left(-\frac{h^2}{a_0^2}\right) \right] \quad (7)$$

El parámetro a_0 es relativo al rango por $a_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} a$ donde a es el rango y es obtenido visualmente a la distancia cuando el semivariograma se hace estable.

2. Modelos sin umbral. Corresponden a fenómenos con una capacidad infinita de dispersión, donde ninguna de las varianzas de los datos ni las covarianzas pueden ser definidas (Journel y Huijbregts, 1978). En general, estos modelos pueden ser escritos como:

$$\hat{\gamma}(h) = C_0 + Ah^B \quad 0 < B < 2 \quad (8)$$

El parámetro B debe ser estrictamente más grande que cero y estrictamente más pequeño que 2 en orden, para garantizar que la función $\hat{\gamma}(h)$ es condicional positiva definida.

Kriging Universal

Sea la función aleatoria $Z(x_i)$ para cualquier localización, x_i , consistente en dos componentes:

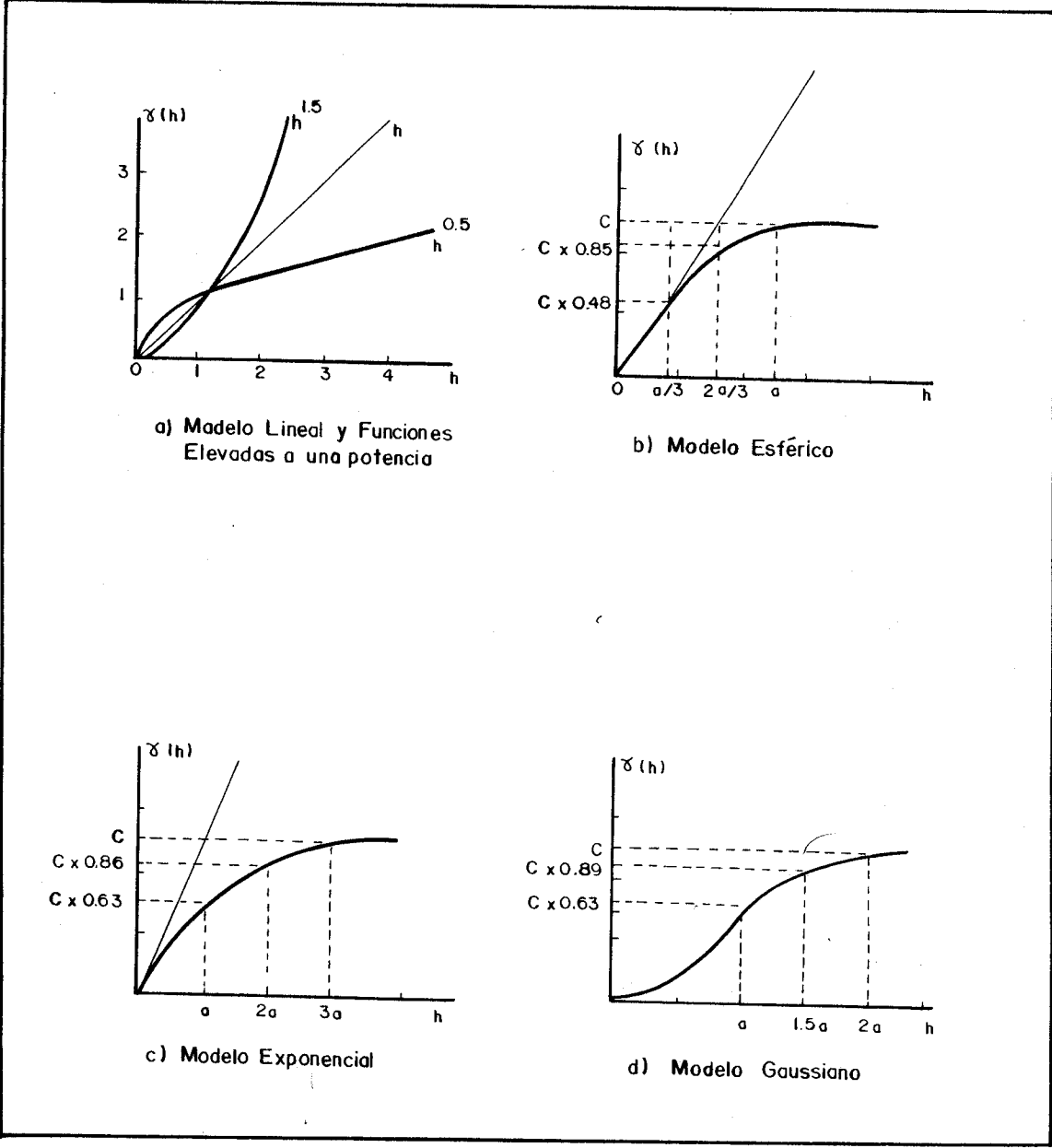


Figura 2.2. Modelos de semivariogramas teóricos (Tomado de - Ramírez, 1980).

$$Z(x_i) = m(x_i) + \varepsilon(x_i) \quad (9)$$

Donde $m(x_i)$ es el valor esperado de la variable regionalizada Z en el punto x_i , dentro del espacio de exploración, y $\varepsilon(x_i)$ es el error residual que se supone tiene como media cero y varianza σ^2 . Por lo tanto, para cada posición de x_i es necesario determinar el valor $m(x_i)$ y tener una expresión para el semivariograma de los residuales de $m(x_i)$ (Webster y Burgess, 1980).

Ahora, si se quiere estimar valores, $Z(x_0)$, para todas las localizaciones, x_0 , donde no se han realizado medidas, y si se define como su estimador $\hat{Z}(x_0)$, como una combinación lineal de los valores observados, entonces:

$$\hat{Z}(x_0) = \sum_{i=1}^N \lambda_i Z(x_i) \quad (10)$$

Donde N es el número de valores medidos $Z(x_i)$ involucrados en la estimación y λ_i son las ponderaciones contiguas a cada valor medido $Z(x_i)$.

El problema se reduce a determinar las ponderaciones, λ_i , éstas podrían ser la inversa del cuadrado de la distancia, la inversa de las distancias o la inversa del número de valores. Sin embargo, el mejor estimador debe ser insesgado y tener varianza mínima. Esto es:

$$E\{\hat{Z}(x_0) - Z(x_0)\} = 0 \quad (11)$$

y tenga un mínimo para:

$$E\{[\hat{Z}(x_0) - Z(x_0)]^2\} \quad (12)$$

En el apéndice B se analiza la ecuación (11) y se encuentra que la estimación será insesgada si:

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \quad (13)$$

También en el mismo apéndice B, utilizando un proceso de minimización de multiplicadores de Lagrange, se obtiene el Sistema Kriging.

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i C(x_i, x_j) - \mu = C(x_i, x_0), \quad l = 1, 2, \dots, N \quad (14)$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$$

y la varianza mínima de Kriging de la diferencia de los valores estimados $\hat{Z}(x_0)$ con respecto a $Z(x_0)$ es:

$$\begin{aligned} V[\hat{Z}(x_0) - Z(x_0)] &= \sigma^2(x_0) = E\{[\hat{Z}(x_0) - Z(x_0)]^2\} \\ &= C(0) + \mu - \sum_{i=1}^N \lambda_i C(x_i, x_0) \end{aligned} \quad (15)$$

Donde $C(x_i, x_j)$ es la función covarianza correspondiente al vector con origen en x_i y extremo en x_j . Lo mismo se aplica a $C(x_i, x_0)$, es decir, al vector con origen en x_i y extremo x_0 . Siendo x_0 la distancia a la que se encuentra el punto a estimar; $C(0)$ se refiere a la varianza de las observaciones $\text{Var}\{Z(x_i)\}$; y μ es un multiplicador de Lagrange.

El sistema Kriging de la ecuación (14) puede ser escrito en notación matricial como:

$$[C][\lambda] = [b] \quad (16)$$

cuya solución es:

$$[\lambda] = [C]^{-1} [b] \quad (17)$$

Donde $[C]$ es la matriz covarianza o matriz Kriging - en términos de covarianza, $[C]^{-1}$ es la inversa de $[C]$, $[\lambda]$ es el vector de factores λ_i ponderaciones no conocidas y multiplicador de Lagrange, y $[b]$ es el vector que contiene a las covarianzas entre el punto conocido en x_i y el punto a estimar en x_0 . También la varianza mínima en notación matricial está dada por:

$$\sigma_k^2(x_0) = C(0) - [\lambda][b] \quad (18)$$

En la cual $[\lambda]^t$ es la transpuesta del vector de lambda.

En el Apéndice B se aclara que el sistema Kriging puede ser usado en términos de semivariograma, $\hat{\gamma}(h) = \hat{\gamma}(x_i, x_i + h) = \hat{\gamma}(x_i, x_j)$, reemplazando $C(h) = C(x_i, x_i+h) = C(x_i, x_j)$ en el sistema de ecuación (14) por $C(0) - \gamma(h)$

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j \hat{\gamma}(x_i, x_j) - \mu = \hat{\gamma}(x_i, x_0), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (19)$$

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j = 1$$

Así también, la varianza estimada de $\sigma^2(x_0)$ en términos de $\hat{\gamma}(h)$ estará dada por:

$$\sigma_k^2(x_0) = C(0) + \mu - \sum_{i=1}^N \lambda_i \hat{\gamma}(x_i, x_0) \quad (20)$$

Cokriging

Señalan Vieira *et al.* (1983) que en la ciencia del suelo, agrometeorología y percepción remota, muy frecuentemente algunas variables son contracorrelacionadas con otras, algunas de estas variables son más fácil de medir que otras, por ejemplo, la conductividad hidráulica y el porcentaje de arena y arcilla en la ciencia del suelo, donde el contenido de arena y arcilla es más fácil de medir que la conductividad hidráulica. En tales situaciones, la estimación de una variable usando información acerca de ambos y la cual resulta ser más útil que el Kriging, es la estimación Cokriging.

Si se considera un campo para el cual dos variables Z_1 y Z_2 tienen medidas con números de muestreo n_1 y n_2 respectivamente, y además la variable Z_2 tuvo menos número de observaciones con respecto a la variable Z_1 , ($n_1 < n_2$) es decir, Z_2 fue muestreada sobre una cuadrícula de 50 metros cuadrados y Z_1 fue muestreada, por ejemplo, sobre una cuadrícula de 10 metros cuadrados y para todas las localizaciones donde hay una muestra de Z_2 , hay también una de Z_1 . Ahora, si se define a Z_1 por $Z_1(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n_1$ y Z_2 por $Z_2(x_j)$ $j = 1, 2, \dots, n_2$, tal que los argumentos x_i y x_j corresponden a las coordenadas X, Y como $x_i = [x_i, y_i]$ y $x_j = [x_j, y_j]$,

respectivamente, Si $z_1(x_i)$ y $z_2(x_j)$ son realizaciones particulares de las funciones aleatorias $Z_1(x_i)$ y $Z_2(x_j)$, respectivamente, se encuentra en el Apéndice C que el semivariograma de $Z_1(x_i)$ es:

$$\gamma_{11}(h) = \frac{1}{2} E\{[Z_1(x_i) - Z_1(x_i+h)]^2\} \quad (21)$$

y el contrasemivariograma entre $Z_1(x_i)$ y $Z_2(x_j)$, el cual es igual al contrasemivariograma entre $Z_2(x_j)$ y $Z_1(x_i)$ es:

$$\begin{aligned} \gamma_{12}(h) &= \frac{1}{2} E\{[Z_1(x_i) - Z_1(x_i+h)][Z_2(x_j) - Z_2(x_j+h)]\} \\ &= \gamma_{21}(h) \end{aligned} \quad (22)$$

y el semivariograma de $Z_2(x_j)$ es:

$$\gamma_{22}(h) = \frac{1}{2} E\{[Z_2(x_j) - Z_2(x_j+h)]^2\} \quad (23)$$

Ahora, si se quiere estimar valores, $Z_2(x_0)$ para todas las localizaciones, x_0 , donde no se han realizado medidas y si se define como su estimador $\hat{Z}_2(x_0)$, como una combinación lineal de los valores observados, entonces:

$$\hat{Z}_2(x_0) = \sum_{i=1}^{N_1} \lambda_{1i} Z_1(x_i) + \sum_{j=1}^{N_2} \lambda_{2j} Z_2(x_j) \quad (24)$$

Donde N_1 y N_2 son los números de los datos vecinos de Z_1 y Z_2 respectivamente, usados en la estimación de un valor Cokrigado $\hat{Z}_2(x_0)$, también la mejor estimación será insesgada y de varianza mínima, es decir:

$$E\{\hat{Z}_2(x_0) - Z_2(x_0)\} = 0 \quad (25)$$

y se tenga un mínimo para la varianza de cokriging, $\sigma_c^2(x_0)$ - de la diferencia de los valores estimados $\hat{Z}_2(x_0)$ con respecto

a $Z_2(x_0)$.

$$V[\hat{Z}_2(x_0) - Z_2(x_0)] = \sigma^2(x_0) = E\{[\hat{Z}_2(x_0) - Z_2(x_0)]^2\} \quad (26)$$

En el análisis efectuado en el Apéndice C se encuentra que el estimador de $\hat{Z}_2(x_0)$ es insesgado si:

$$\sum_{j=1}^{N_2} \lambda_{2j} = 1 \quad (27)$$

y

$$\sum_{i=1}^{N_1} \lambda_{1i} = 0 \quad (28)$$

siendo el sistema Cokriging

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_1} \lambda_{1i} C_{11}(x_i, x_k) + \sum_{j=1}^{N_2} \lambda_{2j} C_{12}(x_k, x_j) - \mu_1 = \\ = C_{12}(x_k, x_0), \quad k = 1, 2, \dots, N_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_1} \lambda_{1i} C_{12}(x_i, x_l) + \sum_{j=1}^{N_2} \lambda_{2j} C_{22}(x_j, x_l) - \mu_2 = \\ = C_{22}(x_l, x_0), \quad l = 1, 2, \dots, N_2 \end{aligned}$$

Bajo las restricciones de las ecuaciones (27) y (28) la varianza estimada de $\sigma_C^2(x_0)$ considerando el método Cokriging de acuerdo al Apéndice C, es:

$$\begin{aligned} \sigma_{C_2}^2(x_0) = C_{22}(0) + \mu_2 - \sum_{i=1}^{N_1} \lambda_{1i} C_{12}(x_i, x_0) \\ - \sum_{j=1}^{N_2} \lambda_{2j} C_{22}(x_j, x_0) \end{aligned} \quad (30)$$

la solución del sistema de ecuaciones (29), producirá N_1 ponderaciones λ_{1i} , N_2 ponderaciones λ_{2j} y los μ_1 y μ_2 multiplicadores de Lagrange.

A diferencia del sistema Kriging, el sistema Cokriging puede ser escrito simplemente en términos de contra semivariograma $\gamma_{K'K}(h)$ sólo si $C_{K'K}(h) = C_{KK'}(h)$ (Journel y Huijbregts, 1978). Esto puede ser verificado en la práctica calculando los dos contravariogramas $C_{12}(h)$ y $C_{21}(h)$ y determinando si son iguales o no; de ser iguales, el sistema Cokriging puede ser escrito en términos de contrasemivariograma usando la relación:

$$\gamma_{K'K}(h) = C_{K'K}(0) - C_{K'K}(h)$$

Estimación del Error

Tanto Kriging y Cokriging, como cualquier otro método de estimación, involucra un error. Este error, debido al hecho de que la variable a ser estimada es generalmente en algo diferente al valor estimado (Journel y Huijbregts, 1978). La estimación del error, $e(x_k)$, es definida como la diferencia entre la medida $Z(x_k)$ y la estimada $\hat{Z}(x_k)$, valores para alguna localización x_k . Así, si se tiene una serie de n valores medidos, $Z(x_k)$ podemos obtener una serie de n valores estimados para localidades idénticas, $\hat{Z}(x_i)$ y entonces calcular una serie de n errores (Vieira *et al*, 1981)

$$e(x_i) = [\hat{Z}(x_i) - Z(x_i)]$$

o n errores reducidos

$$r(x_i) = [\hat{Z}(x_i) - Z(x_i)] / \hat{\sigma}_k(x_i)$$

Donde $\hat{\sigma}(x_i)$ es la desviación estandar estimada. Parece lógico preferir los errores reducidos, $r(x_i)$ sobre los errores estimados, $e(x_i)$, dado que son de menor dimensión e independientes de la unidad en la cual las medidas son expresadas.

Los errores reducidos, $r(x_i)$, pueden ser considerados una realización particular de la variable aleatoria $R(x_i)$

para el punto x_i , la serie de todas las variables

$$R(x_i) = [\hat{Z}(x_i) - Z(x_i)]/S(x_i) \quad (34)$$

es una función aleatoria, $R(x_i)$ en la cual $S(x_i)$ es una variable aleatoria correspondiente a la desviación estándar de estimación, $\sigma_K(x_i)$. Es posible ahora hacer inferencias estadísticas sobre $R(x_i)$ y calcular la esperanza $m_R = E\{R(x_i)\}$ y varianza $\sigma_R^2 = \text{Var}\{R(x_i)\}$ como los dos parámetros para la función de distribución de los errores reducidos $R(x_i)$. $R(x_i)$ puede ser considerado estacionario cuando $Z(x_i)$ es el mismo estacionario.

La calidad de los métodos de estimación puede ser verificada a través de dos condiciones de los errores reducidos (Delhomme, 1978):

- a) La media del error, m_R , debe ser cercana a cero
- b) La varianza, σ_R^2 , debe ser igual a 1

Para calcular intervalos de confianza, en cierto modo dos parámetros (m_R y σ_R^2) de la función de distribución pueden ser encontrados para describir la distribución de los errores reducidos. La Distribución Normal ha sido una de las más observadas frecuentemente en la práctica (Journel y Huijbregts, 1978).

Bajo la asunción de distribución normal de los errores reducidos $R(x_i)$, una prueba t puede ser realizada sobre el error medio, m_R , para probar la significancia de la asunción $m_R = 0$. Para la varianza de los errores reducidos es

esperado (Delhomme, 1978) sea igual a 1, y una prueba de χ^2 puede ser realizada. Además, el 95 por ciento de los errores reducidos se espera que se encuentren entre - 2 y 2, lo cual es equivalente a esperar que los errores reducidos siguen una función de distribución normal con parámetro $m_R = 0$ y $\sigma_R = 1$ (Snedecor y Cochran, 1967).

La explicación práctica del cálculo de los errores reducidos es debido a la importancia del efecto de los errores sobre la evaluación de la calidad de la estimación y las asunciones para las cuales la estimación es hecha. La técnica es llamada contra-validación o jackknifing.

Si se tiene una serie de n valores medida, $Z(x_i)$, distribuidos bajo un campo de área S y para el cual un semi-variograma experimental $\hat{\gamma}(h)$ ha sido encontrado para ser adecuadamente ajustado por algún modelo. Además, para cualquier posición, x_i , se estimó un valor $\hat{Z}(x_i)$ y la varianza estimada $\hat{\sigma}_k^2(x_i)$ usando los n puntos cercanos de x_i pero no el mismo. En otras palabras, para cualquier posición x_i , pretendiendo que el valor de $\hat{Z}(x_i)$ no tuvo que ser medido, y el resto - valores medidos aún tiene el mismo variograma $\hat{\gamma}(h)$. Como resultado se tendría una serie de n valores medidos $Z(x_i)$, valores estimados $\hat{Z}(x_i)$ y varianza de estimación $\hat{\sigma}_k^2(x_i)$ los cuales hacen posible el cálculo de los errores reducidos $r(x_i)$.

Una aproximación similar puede ser usada por el Co-kriging calculando el error reducido.

$$R_2(x_i) = [\hat{Z}_2(x_i) - Z_2(x_i)] / \sigma_{K_2}(x_i) \quad (35)$$

Interpretaciones similares pueden ser obtenidas, tal como la calidad de la estimación CoKriging, la calidad de los modelos estructurales usados (contra semivariograma) y validez de las asunciones realizadas.

Aplicación de la Variabilidad Espacial

Señala Babalola (1978) que en el manejo del suelo-agua se requiere una confiable estimación de las propiedades del suelo y el agua para predecir y controlar la dinámica del agua en el suelo. Esta estimación debería tomar en cuenta la variabilidad espacial de las propiedades suelo-agua en el campo.

Manifiestan Sisson y Wierenga (1981) que la variabilidad de los suelos con respecto a sus propiedades hidráulicas han sido estudiadas por algunos investigadores como: Biggar y Nielsen (1976), Nielsen *et al.* (1973), Rogowski (1972), Cassel y Bauer (1975), Warrick *et al.* (1977a, 1977b), y muchos otros.

Mencionan Dugas *et al.* (1983) que crecientemente modelos de cosecha han sido usados para estimar la longitud del área de producción y generar información para consejos de agricultura regional cosecha-tiempo. Para tal propósito se requiere un entendimiento de los factores afectados espacialmente en la extrapolación de estimados de cosecha, crecimiento y producción. Examinan la influencia de distancia, elevación y precipitación mensual sobre variaciones de cultivos de maíz -

(*Zea mays* L.) y sorgo (*Sorghum vulgare*) usando datos de temperaturas máximas y mínimas, radiación y precipitación para simular la producción en sitios de Kansas, Oklahoma y Texas, los errores de producción (definido como la diferencia de producción entre una distancia y un sitio centralmente localizado de referencia) fueron calculados para cada año. La producción media simulada sobre todos los años fue aproximadamente igual dentro de cada área de maíz y sorgo, es decir, la media aritmética de errores de producción fueron cercanas a -
cero.

Examinaron Gajem *et al.* (1981) la estructura espacial de las propiedades de un suelo típico torrifluent en la Universidad de Arizona en la estación experimental de Marana. Novecientas muestras de nueve longitudes fueron colectadas en líneas rectas en 20, 200 y 2000 cm de intervalos. -
Todas las muestras fueron a 50 cm de profundidad, las variables medidas incluyen 0.1 a 15 bars de contenido de agua, -
agua disponible, área superficial, distribución del tamaño -
en partículas, pH, conductividad eléctrica y densidad a siete días después de la irrigación. Funciones de auto correlación se evaluaron para cada parámetro y se encontró ser co -
rrelacionadas sobre el espacio con patrones de tres tipos bá -
sicos: típicos, aleatorios o con gran zona de influencia.

Señalan Mc Bratney y Webster (1983) que una tarea co -
mún en estudios regionales de suelos es determinar los valores medios de propiedades particulares de muestras de suelo.

Las estimaciones del número de observaciones necesarias para tal propósito son basadas sobre la teoría del muestreo clásico, sin considerar a la dependencia espacial en los datos. Así proponen un método para determinar tamaño de muestra, que es el número de observaciones tomando en cuenta la dependencia espacial. El método depende del conocimiento del semivariograma de la propiedad de interés, el cual es usado para calcular las varianzas en la vecindad de cada punto de observación. Obtienen la varianza global y de la cual calculan el error estandar, y el tamaño de muestra es minimizado considerando la situación de los lugares de muestreo.

Realizó McCool (1970) experimentos en el laboratorio de conservación del agua y estructuras del Departamento de Agricultura de los Estados Unidos, para probar la certeza y aplicabilidad en la generación de procesos de las ecuaciones de flujo con variabilidad espacial, así trabajó sobre el efecto de la longitud de hierba y flujo variante espacialmente sobre la coriolisis o coeficiente de velocidad principal y sobre el boussinesq o coeficiente de momento en ecuaciones para flujo en canales abiertos. Esto ayuda en el diseño de canales con hierba, donde el corte seccional cambia rápidamente.

Menciona Delhomme (1978) que muchos de los métodos generalmente usados en hidrociencias para interpolación, comúnmente les falta considerar lo espacial y cuantificar la exactitud de los estimados. Señala que la teoría de las variables regionalizadas permite la relación entre la

correlación espacial en campo de hidrometeorología o hidrogeología y la precisión de interpolación o determinación de valores comunes sobre esos campos. Presenta también una serie de casos en contornos automáticos para modelos numéricos, estimación de precipitación sobre una área de captación y diseño del sistema de medición.

Da énfasis Olea (1974) a la teoría de las variables regionalizadas diciendo que permite la formulación de un algoritmo superior para contornear y lo aplica como un método alternativo para generar cuadrículas donde las relaciones espaciales son consideradas. Además, menciona que el Kriging Universal es un procedimiento de interpolación exacto y probablemente el más importante que produce una medida para la estimación del error en cualquier punto del espacio muestral.

Aplicó Roman (1980) la metodología desarrollada por Matheron sobre las variables regionalizadas consideradas en la interpolación Kriging en un estudio de mantos freáticos en donde frecuentemente se tienen pocos puntos de observación y de los cuales se parte para conocer las variaciones del nivel freático en toda una área de interés, como fue en este caso el distrito de riego número 14, Río Colorado, Baja California Norte y Sonora. En base a la interpolación Kriging realizó una representación gráfica más exacta y automática de los datos estimados mediante planos de líneas de isovalores.

Determinaron Rodman *et al.* (1974) la relación fricción con uniformidad de flujo para una superficie con vegetación -

simulada, con la finalidad de predecir el flujo del agua superficial, variando espacialmente en estado estable.

Resolvió Wallender (1986) utilizando un modelo de irrigación por surcos y ecuaciones de balance de volumen, características de infiltración variando espacialmente, asumiendo medidas de espacio constantes, encontró que las características de infiltración no uniformes (en suelos relacionados variablemente) reducen el coeficiente de uniformidad de Christiansen, más que reducir la eficiencia de aplicación del agua.

Analizaron Carvallo *et al.* (1976) la conductividad hidráulica en suelos no saturados contra profundidad *in situ* en cinco parcelas de infiltración dentro de una área de 0.01 hectáreas sobre un suelo formado de materiales lacustres en un lecho de lago glacial. Suficiente agua fue dejada para infiltrarse en cada parcela y mojar el perfil del suelo a 152 cm, la superficie del suelo fue cubierta para prevenir evaporación durante el período de drenaje, la presión del agua del suelo fue monitoreada con tensiómetros por triplicado a profundidades de 15, 30, 45, 61, 91, 122 y 152 cm. Encontraron variabilidad espacial significativa de la conductividad hidráulica con el nivel de uno por ciento, debido a la naturaleza heterogénea del suelo en la dirección vertical.

Observaron Jimyeh *et al.* (1986) variabilidad en la tensión agua-suelo a lo largo de 290 metros de longitud a través de un campo cerca de Socorro, Nuevo México, las tensiones

fueron medidas por 94 tensiómetros individuales permanentemente instalados a intervalos de tres metros en toda la longitud y a 0.3 metros de profundidad. La longitud fue monitoreada varias veces durante un período de dos semanas siguientes a 13 milímetros de lluvia. Las observaciones muestran un incremento gradual de la tensión del agua en el tiempo y un alto grado de variabilidad espacial, el rango de tensión de 0.15 a 0.7 bars a un tiempo dado. El análisis de covarianza de los datos muestran que las variaciones son espacialmente correlacionadas sobre distancias de mínimo seis metros.

Estudiaron Davidoff *et al.* (1986) la variabilidad espacial de la temperatura del suelo en una longitud de 80 metros, sobre un campo desnudo de suelo aluvi6n limoso. Midi6ron la temperatura del suelo a intervalos de 68 cent6metros en toda la longitud y a varias profundidades del suelo. La estructura espacial de los datos de temperatura fueron examinados por semivariogramas y autocorrelogramas. Las observaciones de temperatura se encontraron ser espacialmente independientes y para 20 y 30 cent6metros de profundidad del suelo existe un efecto Nugget puro. Un modelo esf6rico fue encontrado para describir todos los semivariogramas, la estructura espacial fue encontrada a dos escalas: primero, una dependencia espacial manifestada por el rango de influencia y longitud de autocorrelaci6n no excediendo 25 metros, y una segunda estructura espacial con rango de influencia de 25 a 50 metros.

Conducieron Wagenet y Jurinak (1978) un estudio para examinar datos recabados en microcuencas de tierra para

cuantificar propiedades del suelo variando espacialmente, los sitios de muestreo se encontraron sobre la formación lutita - mancos. Se encontró que la conductividad eléctrica en una proporción uno a uno utilizada como índice, su varianza se incrementa con la profundidad del suelo.

Determinaron Morkoc, *et al.* (1987), conductividades eléctricas de extractos de pasta saturada de 225 muestras de suelo de profundidades de 30 a 60 centímetros a lo largo de cinco longitudes. El campo fue irrigado usando dos líneas fuentes de un sistema de aspersión, aplicando dos diferentes calidades de agua de irrigación. El intervalo de muestreo a lo largo de cada longitud fue de un metro. Cuatro variogramas direccionales experimentales de la conductividad eléctrica fueron calculados y muestran una estructura con un rango de 19 metros.

Desarrolló Ramírez (1980) una investigación utilizando el método Kriging en la variable de sales en el suelo y su comparación con el método de funciones de tendencia. Menciona que:

- a) El método Kriging por medio del variograma permite representar la variación de la variable en forma satisfactoria.
- b) Es posible verificar por medio del variograma si los errores que se cometen en el muestreo o en el manejo de los datos existen y son significativos.

- c) En el caso de las sales en el suelo, cuando las distancias son pequeñas, existe correlación entre los valores.
- d) El método Kriging podría utilizarse en la mayor parte de las variables que se manejan en la agricultura.

Utilizó Cortés (1987) la interpolación Kriging para mostrar la dependencia espacial de niveles freáticos en datos tomados en una cuadrícula de 150 metros por lado en un área experimental de salinidad y drenaje. El semivariograma ajustado fue del tipo esférico con un rango de 504 metros.

Aplicaron Cortés y Morones (1988) la interpolación Kriging en niveles dinámicos de los pozos de producción de agua existentes a distancias variables entre sí en un acuífero de conglomerado de calizas. El semivariograma ajustado fue del tipo esférico encontrando un rango de 1150.593 metros.

Algunos Conceptos Sobre Algebra Lineal

Una función lineal de k variables independientes es definida por Hoffman y Kunze (1973) como $\ell(x) = \sum_{i=1}^k a_i x_i = A'x = x'A$ donde, a_i son cualquier constante, A es un vector que contiene a las constantes a_i , A' es el vector transpuesto de A , x es el vector de variables reales independientes y x' es el vector transpuesto de x . Siendo la derivada de la función respecto a x igual a $d\ell(x)/dx = A$.

Comenta Searle (1971) que una expresión de la forma $f(x) = A'XY$ es llamada forma bilineal, donde A' e Y son vectores de constantes y X es una matriz de variables reales independientes. La derivada de una forma lineal es $df(x)/dx = AY'$.

Señala Hadley (1969) que una función $f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ puede ser escrita como $f(x) = X'AX$ llamada forma cuadrática, donde X es un vector $n \times 1$, X' es el vector transpuesto de X , y A es una matriz $n \times n$, simétrica y denominada matriz asociada a la forma cuadrática. También menciona que, una forma cuadrática $X'AX$ es positiva definida si y solamente si $X'AX > 0$ para todo vector X diferente de cero, y es positiva semidefinida si y solamente si $X'AX \geq 0$ para todo vector X y $X'AX = 0$ para algún vector X diferente de cero. Así, se dice que la matriz A es positiva definida si la forma cuadrática $X'AX$ es positiva definida. La derivada de la forma cuadrática $f(x) = X'AX$ de n variables independientes (x_1, x_2, \dots, x_n) y donde A es una matriz $n \times n$ simétrica de constantes, viene dada por $df(x)/dx = 2AX$.

Por otro lado si X es un vector $n \times 1$ los valores esperados serán:

$$E(X) = \begin{bmatrix} E(x_1) \\ E(x_2) \\ \vdots \\ E(x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = m \mathbf{1} = M$$

Siendo M el vector de medias o vector esperado de X .

También si $X' = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ es un vector de variables aleatorias distribuidas conjuntamente teniendo todas varianzas finitas, la varianza de X está dada por:

$$\text{Var}(X) = V = E\{[X - E(X)][X - E(X)]'\} = E\{[X - \bar{M}][\bar{X} - \bar{M}]'\}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$$

Donde σ_{ij} es la covarianza entre las variables i -ésima y la j -ésima definida por:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = \text{Cov}(x_i, x_j) &= E\{[x_i - E(x_i)][x_j - E(x_j)]\} \\ &= E\{[x_i - m_i][x_j - m_j]\} \end{aligned}$$

Si $i = j$ entonces:

$$\sigma_{ii} = \sigma_i^2 = E\{[x_i - m_i]^2\}$$

Donde σ_i^2 es la varianza de la i -ésima variable aleatoria.

Así, la matriz $V = \text{Var}(X)$, es una matriz simétrica y positiva definida conocida como matriz de varianzas y covarianzas.

Ahora, si $X' = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ es un vector de variables aleatorias y $A' = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ un vector de constantes, la varianza de la función lineal $A'X$ es:

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(A'X) &= E\{[A'X - E(A'X)][A'X - E(A'X)]\} \\
 &= E\{A'[X - E(X)][X - E(X)]'A\} \\
 &= A'E\{[X - E(X)][X - E(X)]'\}A \\
 &= A'\text{Var}(X)A = A'VA
 \end{aligned}$$

Y la Covarianza entre las funciones lineales $A'X$ y $B'X$ donde A y B son vectores de constantes es: $\text{Cov}(A'X, B'X)$
 $= A'VB = B'VA$

MATERIALES Y METODOS

Definición y Suposiciones

Del conjunto de observaciones $z(x_j)$, cierto número de ellas serán consideradas para la estimación de una observación $z(x_p)$, las observaciones seleccionadas serán vistas como un vector aleatorio H_p . Suponiendo que c es el número de observaciones en el vector H_p se tiene que:

$$H_p = \begin{bmatrix} z(x_1) \\ z(x_2) \\ \vdots \\ z(x_c) \end{bmatrix} \quad (36)$$

donde el vector H_p es un vector aleatorio de dimensión $c \times 1$.

Sean la media y la varianza de H_p de la forma siguiente:

Media del vector H_p

$$M = E[H_p] = \begin{bmatrix} E[Z(x_1)] \\ E[Z(x_2)] \\ \vdots \\ E[Z(x_c)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m(x_1) \\ m(x_2) \\ \vdots \\ m(x_c) \end{bmatrix} \quad (37)$$

Varianza del vector H_p

$$C = V[H_p] = E\{ [H_p - E(H_p)] [H_p - E(H_p)]' \}$$

$$= \begin{bmatrix} C(x_1, x_2) & C(x_1, x_2) & \dots & C(x_1, x_c) \\ C(x_2, x_1) & C(x_2, x_2) & \dots & C(x_2, x_c) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ C(x_c, x_1) & C(x_c, x_2) & \dots & C(x_c, x_c) \end{bmatrix} \quad (38)$$

Siendo la matriz $C_{c \times c}$ positiva definida y donde -
 $C(x_i, x_j) = \text{Cov}[Z(x_i), Z(x_j)] = E\{[Z(x_i) - E(Z(x_i))][Z(x_j) - E(Z(x_j))]\}$ (39)

$$C(x_i, x_j) = V[Z(x_j)] \quad (40)$$

Entendiéndose en las ecuaciones (39) y (40) que -
 $Z(x_i), Z(x_j)$ son componentes del vector H_p .

Si se asume estacionaridad de orden dos (Apéndice A)
se tendría:

$$M = E[H_p] = \begin{bmatrix} m \\ m \\ \vdots \\ m \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = m\mathbf{1} \quad (41)$$

$$V[H_p] = C = \begin{bmatrix} C(0) & C(x_1, x_2) & \dots & C(x_1, x_c) \\ C(x_2, x_1) & C(0) & \dots & C(x_2, x_c) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ C(x_c, x_1) & C(x_c, x_2) & \dots & C(0) \end{bmatrix} \quad (42)$$

En la asunción de estacionaridad de orden dos, se -
entenderá que las ecuaciones (41) y (42) son ciertas para -
cualquier vector H_p . También que la covarianza $C(x_j, x_j')$ es -
constante para una observación dada entre cualquier dos ob -
servaciones $Z(x_j), Z(x_j')$.

Estimación de una Observación

Para una observación no medida $Z(x_0)$

Dado que el objetivo primordial del uso de la metodología Kriging es la de predecir observaciones no medidas, es importante las condiciones que rodean a la predicción de interés; tales como la forma de obtener la predicción, la desviación con respecto a su valor verdadero y la varianza de dicha desviación.

Sea $Z(x_0)$ una observación no medida que se desea estimar como una combinación lineal del conjunto de observaciones que son componentes del vector H . Así, la estimación de $Z(x_0)$ es definida como sigue:

$$\hat{Z}(x_0) = \sum_{j=1}^c \lambda_{0j} Z(x_j) = \lambda_0' H \quad (43)$$

Donde λ_0 es un vector $c \times 1$ que contiene las ponderaciones λ_{0j} asociadas con cada una de las observaciones $Z(x_j)$ del vector H .

Bajo estacionaridad de orden dos, se tendrá:

$$E[\bar{Z}(x_p)] = m \quad (44)$$

$$\begin{aligned} E[\hat{Z}(x_0)] &= E\left\{ \sum_{j=1}^c \lambda_{0j} Z(x_j) \right\} = \sum_{j=1}^c \lambda_{0j} E[Z(x_j)] \\ &= \sum_{j=1}^c \lambda_{0j} (m) = m \sum_{j=1}^c \lambda_{0j} \\ &= m \mathbf{1}' \lambda_0 = m \text{ si y sólo si } \sum_{j=1}^c \lambda_{0j} = \mathbf{1}' \lambda_0 = 1 \end{aligned} \quad (45)$$

Claramente el valor esperado de la diferencia entre $\hat{Z}(x_0)$ y $Z(x_0)$ bajo estacionaridad de orden dos es:

$$E\{\hat{Z}(x_0) - Z(x_0)\} = 0 \text{ si y sólo si } \sum_{j=1}^c \lambda_{0j} = \mathbf{1}'\lambda_0 = 1 \quad (46)$$

La varianza de la diferencia entre $\hat{Z}(x_0)$ y $Z(x_0)$, $\sigma_K^2(x_0)$, la k por Kriging, asumiendo estacionaridad de orden dos, es de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \sigma_K^2(x_0) &= V[\hat{Z}(x_0) - Z(x_0)] = V[\lambda_0'H - Z(x_0)] \\ &= V[\lambda_0'H] + V[Z(x_0)] - 2 \text{Cov}[\lambda_0'H, Z(x_0)] \\ &= \lambda_0'V(H)\lambda_0 + C(0) - 2E\{[\lambda_0'H - E(\lambda_0'H)][Z(x_0) - E(Z(x_0))]' \} \\ &= \lambda_0'V(H)\lambda_0 + C(0) - 2\lambda_0'E\{[H - E(H)][Z(x_0) - E(Z(x_0))]' \} \end{aligned} \quad (47)$$

Puede notarse en la ecuación (47) que

$E\{[H - E(H)][Z(x_0) - E(Z(x_0))]' \}$ se refiere a un vector C_0 de dimensión $c \times 1$ que contiene las covarianzas entre cada una de los componentes del vector H y la observación $Z(x_0)$

$$E\{[H - E(H)][Z(x_0) - E(Z(x_0))]' \} = \begin{bmatrix} C(x_1, x_0) \\ C(x_2, x_0) \\ \vdots \\ C(x_c, x_0) \end{bmatrix} = C_0 \quad (48)$$

Sustituyendo las ecuaciones (42) y (48) en (47) se obtiene:

$$\sigma_K^2(x_0) = V[\hat{Z}(x_0) - Z(x_0)] = \lambda_0'C\lambda_0 + C(0) - 2\lambda_0'C_0 \quad (49)$$

Para una Observación Medida $Z(x_p)$

El objetivo de estimar un valor medido es el de valorar el grado de precisión alcanzado con la metodología Kriging; para ésto, la literatura se refiere a los errores reducidos.

Supongamos que $Z(x_p)$ es la p -ésima componente del vector H_p . Lo anterior significa que $Z(x_p)$ es conocido. Si es $Z(x_p)$ la que se desea estimar, es claro que la estimación deberá estar en función de los $c - 1$ componentes restantes del vector H_p . De manera que la parte interesante es lo referente a la desviación del $\hat{Z}(x_p)$ con respecto a $Z(x_p)$.

El valor esperado de la diferencia entre $\hat{Z}(x_p)$ y $Z(x_p)$, considerando estacionaridad de orden dos es:

$$\begin{aligned} E\{[\hat{Z}(x_p) - Z(x_p)]\} &= E[\lambda_p' H_p] \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^c \lambda_{pj} E[Z(x_j)] - E[Z(x_p)] \\ &= m \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^c \lambda_{pj} - m = 0 \end{aligned} \quad (50)$$

$$\text{si y sólo si } \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^c \lambda_{pj} = 1 \text{ y } \lambda_{pp} = -1$$

El vector λ_p de dimensión $c \times 1$ es de la forma siguiente:

$$\lambda_p = \begin{bmatrix} \lambda_{p,1} \\ \lambda_{p,2} \\ \lambda_{p,p-1} \\ \lambda_{p,p+1} \\ \vdots \\ \lambda_{p,c} \end{bmatrix}; \text{ con } \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^c \lambda_{pj} = 1 \quad (51)$$

00357

U.A.A.A.N.

La varianza de la diferencia entre el valor estimado $\hat{Z}(x_p)$ y el valor observado $Z(x_p)$, $\sigma_K^2(x_p)$, es:

$$\sigma_K^2(x_p) = V[\hat{Z}(x_p) - Z(x_p)] = V[\lambda_p H_p] = \lambda_p' V[H_p] \lambda_p \quad (52)$$

Sustituyendo la ecuación (42) en (52)

$$\sigma_K^2(x_p) = \lambda_p' C \lambda_p \quad (53)$$

En lugar de utilizar la diferencia entre $\hat{Z}(x_p)$ y $Z(x_p)$ para evaluar el grado de ajuste alcanzado por la metodología Kriging, se utiliza a $r(x_p)$ conocido como error reducido que es definido por la siguiente ecuación:

$$r(x_p) = \frac{\hat{Z}(x_p) - Z(x_p)}{\sigma_K(x_p)} \quad (54)$$

El valor esperado de $r(x_p)$, m_r , es:

$$E[r(x_p)] = E\left\{ \frac{\hat{Z}(x_p) - Z(x_p)}{\sigma_K(x_p)} \right\} = \frac{E\{[\hat{Z}(x_p) - Z(x_p)]\}}{\sigma_K(x_p)} \quad (55)$$

Considerando a la ecuación (50) en la ecuación (55) se tiene que:

$$E[r(x_p)] = 0 \text{ si y sólo si } \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^c \lambda_{pj} = 1 \text{ y } \lambda_{pp} = -1 \quad (56)$$

También es de interés conocer la varianza de $r(x_p)$, σ_r^2 . Así:

$$\begin{aligned} \sigma_r^2 &= V[r(x_p)] = V\left[\frac{\hat{Z}(x_p) - Z(x_p)}{\sigma_K(x_p)} \right] = V\left[\frac{\lambda_p H_p}{\sigma_K(x_p)} \right] \\ &= \frac{V[\lambda_p H_p]}{\sigma_K^2(x_p)} = \frac{\lambda_p' V[H_p] \lambda_p}{\sigma_K^2(x_p)} \quad (57) \end{aligned}$$

Sustituyendo la ecuación (42) en (57) se obtiene:

$$\sigma_r^2 = V[r(x_p)] = \frac{\lambda'_p C \lambda_p}{\sigma_K^2(x_p)} \quad (58)$$

y por ecuación (53), la varianza de $r(x_p)$ será:

$$\sigma_r^2 = \frac{\sigma_K^2(x_p)}{\sigma_K^2(x_p)} = 1$$

Considerando las deducciones realizadas en las ecuaciones (50) y (59) se observa que el error reducido, $r(x_p)$, tiene media, m_r , igual a cero y varianza, σ_r^2 , igual a la unidad.

Varianza de una Estimación

Varianza de la Diferencia de una Observación No Medida y su Estimador

En el caso de la estimación de una observación no medida, $Z(x_0)$, se requiere que su estimador $\hat{Z}(x_0) = \sum_{j=1}^c \lambda_{0j} Z(x_0)$, cumpla con que $\sum_{j=1}^c \lambda_{0j} = 1$ para que estime insesgadamente a m , bajo estacionaridad de orden dos. Es claro que se puede escoger arbitrariamente un vector λ_0 que satisfaga la restricción $\sum_{j=1}^c \lambda_{0j} = 1$; de esta forma pueden tenerse una infinidad de estimaciones para $Z(x_0)$. Considerando lo anterior, es deseable tener una estimación insesgada que tenga varianza $\sigma_K^2(x_0)$, mínima.

Dado que se conoce la expresión para $\sigma_K^2(x_0)$, se hará uso de la técnica de multiplicadores de Lagrange para la construcción del vector λ_0 , que generará la varianza mínima. La función objetivo será $\sigma_K^2(x_0)$ sujeta a la restricción:

$$\sum_{j=1}^c \lambda_{0j} = 1$$

Sea la función objetivo, Q , de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} Q &= \sigma_k^2(x_0) - \mu \left(\sum_{j=1}^c \lambda_{0j} - 1 \right) = \lambda_0' C \lambda_0 + C(0) - 2\lambda_0' C_0 - \mu \left(\sum_{i=1}^c \lambda_{0j} - 1 \right) \\ &= \lambda_0' C \lambda_0 + C(0) - 2C_0' \lambda_0 - \mu (\mathbf{1}' \lambda_0 - 1) \end{aligned} \quad (60)$$

Donde $\sigma^2(x_0)$ fue definida en la ecuación (49) y μ es un multiplicador de Lagrange.

La función objetivo se desea que sea mínima, de esta forma, se derivará a Q con respecto a λ_0 y μ , igualándolas a cero para despejar las incógnitas λ_0 y μ . Así:

$$\frac{dQ}{d\lambda_0} = 2C\lambda_0 + 0 - 2C_0 - \mu \mathbf{1} \quad (61)$$

$$\frac{dQ}{d\mu} = - \mathbf{1}' \lambda_0 + 1$$

Igualando a cero cada una de las ecuaciones definidas en (61) y despejando para el término que incluye λ_0 .

$$C\lambda_0 = C_0 + \left(\frac{1}{2}\right)\mu \mathbf{1} \quad (62)$$

$$\mathbf{1}' \lambda_0 = 1$$

Claramente:

$$\lambda_0 = C^{-1}C_0 + \left(\frac{1}{2}\right)\mu C^{-1}\mathbf{1} \quad (63)$$

De la ecuación (62) utilizando el hecho de que $\mathbf{1}' \lambda_0 = 1$ en la ecuación (63) se tiene que:

$$\mathbf{1} = \mathbf{1}' \lambda_0 = \mathbf{1}' C^{-1} C_0 + \left(\frac{1}{2}\right)\mu \mathbf{1}' C^{-1} \mathbf{1} \quad (64)$$

Despejando a μ de la ecuación (64)

$$\mu = \frac{2(1 - \mathbf{1}'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}_0)}{\mathbf{1}'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{1}} \quad (65)$$

Sustituyendo el valor de μ de la ecuación (65) en la ecuación (63) se obtiene:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}_0 + \left(\frac{1}{2}\right) \left[\frac{2(1 - \mathbf{1}'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}_0)}{\mathbf{1}'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{1}} \right] \mathbf{C}^{-1}\mathbf{1} \\ &= \mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}_0 + \left[\frac{1 - \mathbf{1}'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}_0}{\mathbf{1}'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{1}} \right] \mathbf{C}^{-1}\mathbf{1} \end{aligned} \quad (66)$$

Así, el λ_0 obtenido mediante la ecuación (66), es el vector que genera la varianza mínima $\sigma_K^2(x_0)$. Sustituyendo la ecuación (66) en la ecuación (49) se tiene:

$$\begin{aligned} \sigma_K^2(x_0) &= \left[\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}_0 + \left(\frac{1 - \mathbf{1}'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}_0}{\mathbf{1}'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{1}} \right) \mathbf{C}^{-1}\mathbf{1} \right]' \mathbf{C} \left[\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}_0 + \left(\frac{1 - \mathbf{1}'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}_0}{\mathbf{1}'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{1}} \right) \mathbf{C}^{-1}\mathbf{1} \right] \\ &\quad + \mathbf{C}(0) - 2 \left[\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}_0 + \left(\frac{1 - \mathbf{1}'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}_0}{\mathbf{1}'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{1}} \right) \mathbf{C}^{-1}\mathbf{1} \right]' \mathbf{C}_0 \\ &= \mathbf{C}(0) - \mathbf{C}_0' \mathbf{C}^{-1} \mathbf{C}_0 + \frac{(1 - \mathbf{1}'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}_0)^2}{\mathbf{1}'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{1}} \end{aligned} \quad (67)$$

Varianza de la diferencia de una observación medida y su estimador

El vector λ_p , requerido para estimar la varianza de la diferencia de una observación medida $Z(x_p)$ y su estimador $\hat{Z}(x_p)$, debe satisfacer dos restricciones: $\sum_{j=1}^c \lambda_{pj} = 1$ y que $\lambda_{pp} = -1$; o bien $\sum_{j=1}^c \lambda_{pj} = 0$ y que $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^c \lambda_{pj} = 1$. Así, involucrando estas dos condiciones en la función objetivo, Q , se tendrá:

$$Q = \lambda_p^t C \lambda_p - \mu_1 \left(\sum_{j=1}^c \lambda_{pj} \right) - \mu_2 (\lambda_{pp} + 1) = \lambda_p^t C \lambda_p - \mu_1 \mathbf{1}' \lambda_p - \mu_2 (e_p^t \lambda_p + 1) \quad (68)$$

o bien:

$$\begin{aligned} Q &= \lambda_p^t C \lambda_p - \mu_1 \left(\sum_{j=1}^c \lambda_{pj} \right) - \mu_2 [(\mathbf{1} - e_p)' \lambda_p - 1] \\ &= \lambda_p^t C \lambda_p - \mu_1 \mathbf{1}' \lambda_p - \mu_2 [(\mathbf{1} - e_p)' \lambda_p - 1] \end{aligned} \quad (69)$$

donde μ_1, μ_2 son los multiplicadores de Lagrange y e_p es el vector unitario $c \times 1$, que tiene la unidad en la componente p -ésima. También, λ_{pp} es p -ésimo elemento del vector λ_p

Tomando como función objetivo, Q , definida por la ecuación (68) se obtiene:

$$\frac{dQ}{d\lambda_p} = 2C\lambda_p - \mu_1 \mathbf{1} - \mu_2 e_p$$

$$\frac{dQ}{d\mu_1} = -\mathbf{1}' \lambda_p \quad (70)$$

$$\frac{dQ}{d\mu_2} = -e_p^t \lambda_p - 1$$

Igualando a cero cada una de las ecuaciones que conforman el sistema dado por la ecuación (70) y despejando

$$C\lambda_p = \frac{1}{2} [\mu_1 \mathbf{1} + \mu_2 e_p] \quad (71)$$

$$\mathbf{1}' \lambda_p = 0 \quad (72)$$

$$e_p^t \lambda_p = -1 \quad (73)$$

De la ecuación (71) se tiene:

$$\lambda_p = \frac{1}{2} C^{-1} [\mu_1 \mathbf{1} + \mu_2 e_p] \quad (74)$$

Aplicando las condiciones definidas por las ecuaciones (72) y (73) en la ecuación (74)

$$0 = \mathbf{l}'\lambda_p = \left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{l}'\mathbf{C}^{-1}[\mu_1\mathbf{l} + \mu_2\mathbf{e}_p] \quad (75)$$

$$-\mathbf{l} = \mathbf{e}_p'\lambda_p = \left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{e}_p'\mathbf{C}^{-1}[\mu_1\mathbf{l} + \mu_2\mathbf{e}_p] \quad (76)$$

Claramente (75) y (76) constituyen un sistema de ecuaciones simultáneas para las incógnitas μ_1 y μ_2 . Entonces:

$$(\mathbf{l}'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{l})\mu_1 + (\mathbf{l}'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{e}_p)\mu_2 = 0 \quad (77)$$

$$(\mathbf{e}_p'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{l})\mu_1 + (\mathbf{e}_p'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{e}_p)\mu_2 = -2 \quad (78)$$

También:

$$-(\mathbf{l}'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{l})(\mathbf{e}_p'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{l})\mu_1 - (\mathbf{l}'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{e}_p)\mu_2 = 0$$

$$\frac{(\mathbf{l}'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{l})(\mathbf{e}_p'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{l})\mu_1 + (\mathbf{l}'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{l})(\mathbf{e}_p'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{e}_p)\mu_2 = -2\mathbf{l}'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{l}}{[(\mathbf{l}'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{l})(\mathbf{e}_p'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{e}_p) - (\mathbf{l}'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{e}_p)^2]}\mu_2 = -2\mathbf{l}'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{l}$$

$$\mu_2 = \frac{-2\mathbf{l}'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{l}}{(\mathbf{l}'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{l})(\mathbf{e}_p'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{e}_p) - (\mathbf{l}'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{e}_p)^2} \quad (79)$$

Sustituyendo la ecuación (79) en la ecuación (77) y despejando a μ_1

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{-(\mathbf{l}'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{e}_p)}{\mathbf{l}'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{l}} \\ &= - \left[\frac{\mathbf{l}'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{e}_p}{\mathbf{l}'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{l}} \right] \left[\frac{-2\mathbf{l}'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{l}}{(\mathbf{l}'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{l})(\mathbf{e}_p'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{e}_p) - (\mathbf{l}'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{e}_p)^2} \right] \\ &= \frac{2\mathbf{l}'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{e}_p}{(\mathbf{l}'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{l})(\mathbf{e}_p'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{e}_p) - (\mathbf{l}'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{e}_p)^2} \quad (80) \end{aligned}$$

Sustituyendo las ecuaciones (79) y (80) en la ecuación (74):

$$\begin{aligned} \lambda_p &= \left(\frac{1}{2}\right) C^{-1} \left\{ \left[\frac{2 \mathbf{1}' C^{-1} e_p}{(\mathbf{1}' C^{-1} \mathbf{1}) (e_p' C^{-1} e_p) - (\mathbf{1}' C^{-1} e_p)^2} \right] \mathbf{1} \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{-2 \mathbf{1}' C^{-1} \mathbf{1}}{(\mathbf{1}' C^{-1} \mathbf{1}) (e_p' C^{-1} e_p) - (\mathbf{1}' C^{-1} e_p)^2} \right] e_p \right\} \\ &= \left[\frac{\mathbf{1}' C_p^{-1}}{(\mathbf{1}' C^{-1} \mathbf{1}) C_{pp}^{-1} - (\mathbf{1}' C_p^{-1})^2} \right] C^{-1} \mathbf{1} - \left[\frac{\mathbf{1}' C^{-1} \mathbf{1}}{(\mathbf{1}' C^{-1} \mathbf{1}) C_{pp}^{-1} - (\mathbf{1}' C_p^{-1})^2} \right] C_p^{-1} \end{aligned} \quad (81)$$

En la ecuación (81), C_{pp}^{-1} se refiere al p-ésimo elemento de la diagonal de la inversa de la matriz C , esto es, de la matriz C^{-1} . También C_p^{-1} , se refiere a la p-ésima columna de la matriz C^{-1} .

El vector λ_p definido por la ecuación (81) es el que minimiza la varianza $\sigma_K^2(x_p)$.

Ahora, sustituyendo el valor de λ_p de la ecuación (81) en la ecuación (53) se tiene que:

$$\begin{aligned} \sigma_K^2(x_p) &= \left\{ \left[\frac{\mathbf{1}' C_p^{-1}}{(\mathbf{1}' C^{-1} \mathbf{1}) C_{pp}^{-1} - (\mathbf{1}' C_p^{-1})^2} \right] C^{-1} \mathbf{1} - \left[\frac{\mathbf{1}' C^{-1} \mathbf{1}}{(\mathbf{1}' C^{-1} \mathbf{1}) C_{pp}^{-1} - (\mathbf{1}' C_p^{-1})^2} \right] C_p^{-1} \right\}' C \\ &\quad \left\{ \left[\frac{\mathbf{1}' C_p^{-1}}{(\mathbf{1}' C^{-1} \mathbf{1}) C_{pp}^{-1} - (\mathbf{1}' C_p^{-1})^2} \right] C^{-1} \mathbf{1} - \left[\frac{\mathbf{1}' C^{-1} \mathbf{1}}{(\mathbf{1}' C^{-1} \mathbf{1}) C_{pp}^{-1} - (\mathbf{1}' C_p^{-1})^2} \right] C_p^{-1} \right\} \\ &= \left\{ \left[\frac{\mathbf{1}' C_p^{-1}}{(\mathbf{1}' C^{-1} \mathbf{1}) C_{pp}^{-1} - (\mathbf{1}' C_p^{-1})^2} \right] \mathbf{1}' C^{-1} C - \left[\frac{\mathbf{1}' C^{-1} \mathbf{1}}{(\mathbf{1}' C^{-1} \mathbf{1}) C_{pp}^{-1} - (\mathbf{1}' C_p^{-1})^2} \right] C_p^{-1} C \right\} \\ &\quad \left\{ \left[\frac{\mathbf{1}' C_p^{-1}}{(\mathbf{1}' C^{-1} \mathbf{1}) C_{pp}^{-1} - (\mathbf{1}' C_p^{-1})^2} \right] C^{-1} \mathbf{1} - \left[\frac{\mathbf{1}' C^{-1} \mathbf{1}}{(\mathbf{1}' C^{-1} \mathbf{1}) C_{pp}^{-1} - (\mathbf{1}' C_p^{-1})^2} \right] C_p^{-1} \right\} \\ &= \left[\frac{\mathbf{1}' C^{-1}}{(\mathbf{1}' C^{-1} \mathbf{1}) C_{pp}^{-1} - (\mathbf{1}' C_p^{-1})^2} \right]^2 \mathbf{1}' C^{-1} \mathbf{1} - \left[\frac{\mathbf{1}' C^{-1}}{(\mathbf{1}' C^{-1} \mathbf{1}) C_{pp}^{-1} - (\mathbf{1}' C_p^{-1})^2} \right]^2 \mathbf{1}' C^{-1} \mathbf{1} \end{aligned}$$

$$- \left[\frac{\mathbf{1}'\mathbf{C}^{-1}}{(\mathbf{1}'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{1})C_{pp}^{-1} - (\mathbf{1}'\mathbf{C}_p^{-1})^2} \right]^2 \mathbf{1}'\mathbf{C}\mathbf{1} + \left[\frac{\mathbf{1}'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{1}}{(\mathbf{1}'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{1})C_{pp}^{-1} - (\mathbf{1}'\mathbf{C}_p^{-1})^2} \right]^2 C_{pp}^{-1}$$

$$\sigma_K^2(x_p) = \frac{\mathbf{1}'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{1} [(\mathbf{1}'\mathbf{C}\mathbf{1})C_{pp}^{-1} (\mathbf{1}'\mathbf{C}_p^{-1})^2]}{[(\mathbf{1}'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{1})C_{pp}^{-1} - (\mathbf{1}'\mathbf{C}_p^{-1})^2]^2} = \frac{\mathbf{1}'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{1}}{(\mathbf{1}'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{1})C_{pp}^{-1} - (\mathbf{1}'\mathbf{C}_p^{-1})^2} \quad (82)$$

El desarrollo de la teoría anterior ha sido en base a que es conocida la matriz $C_{\mathbf{X}\mathbf{X}}$ de varianzas y covarianzas. En la realidad, dicha matriz es desconocida y lo único que se conoce es su estimación $\hat{C}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}$, cuyos elementos son obtenidos bajo estacionaridad de orden dos a partir de la relación presentada en la ecuación (A.17) que en términos de semivariograma es:

$$\hat{C}(x_j, x_j') = \hat{C}(h) = \hat{C}(0) - \hat{\gamma}(x_j, x_j') \quad (83)$$

Donde $\hat{C}(0)$ es la estimación de la varianza de las observaciones y $\hat{\gamma}(x_j, x_j') = \hat{\gamma}(h)$ es la estimación del semivariograma de acuerdo a ecuaciones (2) y (3). Así, la selección del modelo ajustado para el semivariograma deberá ser lo más cuidadoso, es decir, escoger un modelo con un coeficiente de correlación alto. Si el grado de ajuste del modelo del semivariograma es satisfactorio y considerando normalidad, es deducible que la función aleatoria de los errores reducidos, sea distribuida Normal con media cero y varianza uno, esto es:

$$R(x_p) = \frac{\hat{Z}(x_p) - Z(x_p)}{\hat{\sigma}_K(x_p)} \sim N(0, 1) \quad (84)$$

Por otro lado, si la ecuación (A.17) es:

$$\gamma(h) = C(0) - C(h)$$

Despejando $C(h)$, dividiendo en ambos términos por $C(0)$ y bajo estacionaridad de orden dos, se tiene que:

$$\rho(h) = \frac{C(h)}{C(0)} = 1 - \frac{\gamma(h)}{C(0)} \quad (85)$$

Donde $\rho(h)$ es el coeficiente de correlación para observaciones $Z(x_j)$ que distan entre sí una distancia h .

Si a cualquier distancia h se tiene que $\rho(h)$ es constante, es decir, que $\rho(h) = \rho$; claramente esto será debido a que $\gamma(h)$ es constante y en cuyo caso, como lo señalan Vieira *et al.* (1983), la metodología aquí propuesta no funciona, si no que debe utilizarse los métodos estadísticos clásicos.

Procedimiento para la Interpolación Kriging

Muestreo

Cuando las observaciones se encuentran regularmente espaciadas, y de acuerdo con la variable de interés en un área determinada, se realiza una cuadrícula cuya distancia está en función de los cambios aparentes que podría tener dicha variable, midiendo el valor de ésta en cada vértice de la cuadrícula. Así, se tiene como datos al área total, la amplitud de la malla, y los valores de la variable, por ejemplo, los datos de niveles freáticos medidos por Cortés (1983) en un área experimental de salinidad y drenaje, localizada

en el Ejido Parras, Municipio de Parras de la Fuente, Coah. (Cuadro 3.1), donde, con equipo topográfico, se delimitó aproximadamente 55 hectáreas y dentro de esta área se trazó una cuadrícula de 150 m por lado, como se presenta en la Figura 3.1, donde en cada uno de los vértices, se efectuó una perforación con barrenas holandesas, realizando así pozos de observación que sirvieron para la localización del nivel freático.

Cuadro 3.1. Datos de profundidad en metros de nivel freático, $z(x_i)$, en diciembre de 1980, en el Ejido Parras.

Hileras/columnas	A	B	C	D
1	1.51	1.82	2.23	2.20
2	1.68	1.67	2.14	2.32
3	2.41	1.65	0.62	1.74
4	1.30	1.36	1.69	1.91
5	0.93	1.75	1.19	1.64
6	2.80	2.67	2.90	3.10
7	3.10	3.20	3.30	3.20

Media de los $z(x_i) = 2.072$; varianza $z(x_i) = 0.544$; STD = 0.738;
C.V. = 35.6 %

Por lo que respecta a observaciones irregularmente espaciadas, lo cual ocurre en muchas situaciones reales donde se cuenta con alguna infraestructura, que puede proporcionar valores de variables de interés y donde dicha infraestructura se encuentra separada por distancias variables. También es común, que en algunos casos, se tomen valores de variables dentro de un área en forma al azar; si se localizaran en un plano, las coordenadas de los sitios de muestreo y los

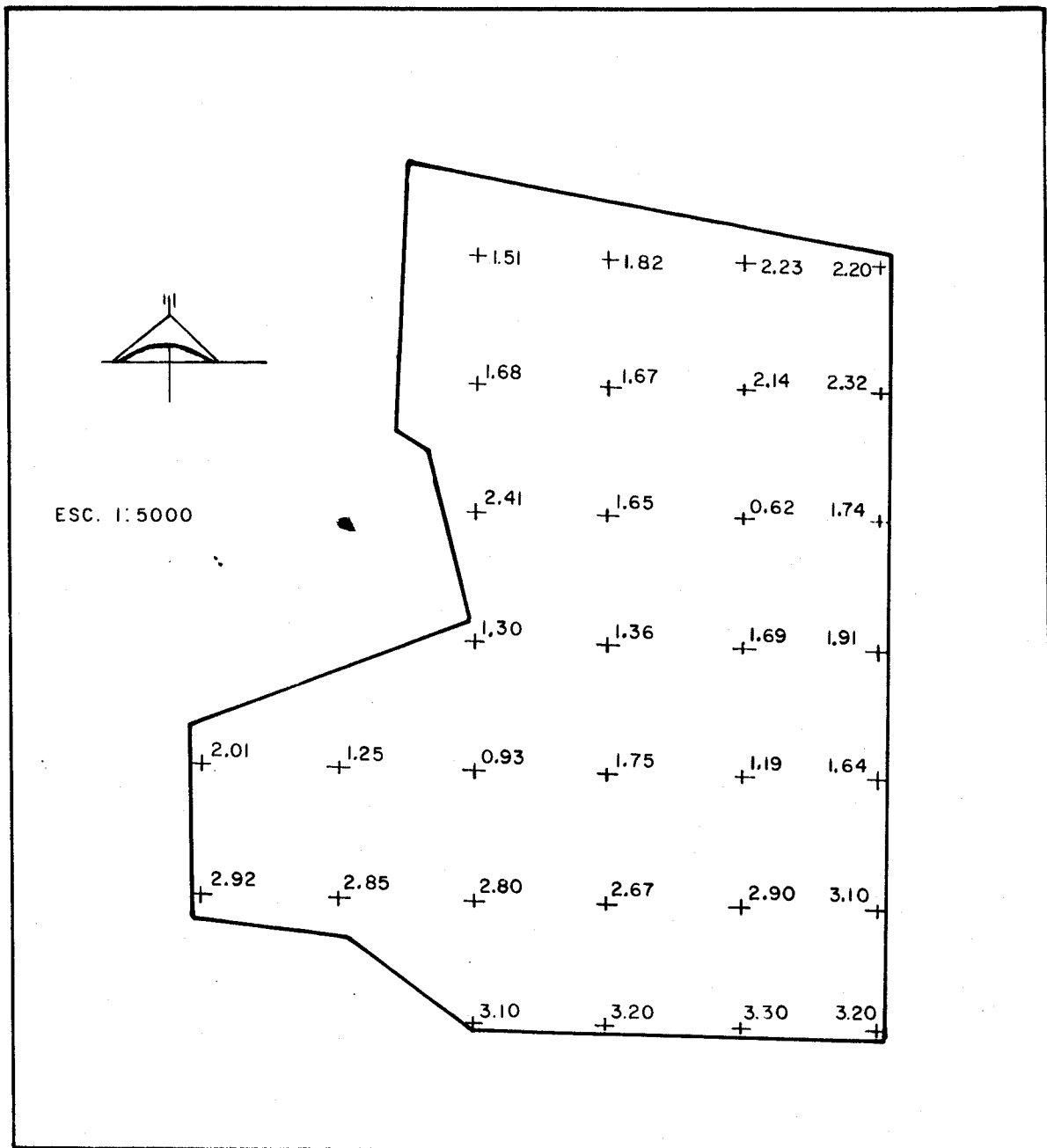


Figura 3.1. Profundidad del nivel freático (m) en Diciembre de 1980 en el Ejido Parras.

valores ahí medidos, por ejemplo, los niveles dinámicos de los pozos de producción de agua a, b, del sistema de agua potable y alcantarillado de Coahuila (SAPAC) y pozos 1, 2, 3 y 4 de la Universidad Autónoma Agraria Antonio Narro (UAAAN); los datos obtenidos referidos a un plano con coordenadas x, y (Figura 3.2), son dados en el Cuadro 3.2.

Cuadro 3.2. Profundidad de niveles dinámicos en metros medidos en noviembre de 1987 en pozos de SAPAC y UAAAN.

Observación	Pozo	Coordenadas (x,y)	Nivel dinámico $Z(x_j)^*$
1	a	(303,1144)	43
2	b	(654,1448)	60
3	1	(180, 0)	71
4	2	(0 , 531)	70
5	3	(232,1050)	49
6	4	(136,1118)	45

* Con media $\bar{x} = 56.33$; varianza = 155.07; STD = 12.4; C.V. = 22.1%

Semivariogramas

En la sección anterior se comentó que los semivariogramas están en función de las observaciones medidas, las distancias y la correlación entre ellas, y es definido por la ecuación (1) y estimado por la ecuación (2) cuando los datos son regularmente espaciados. Además, es necesario tomar en cuenta las direcciones del cálculo señaladas en la Figura 3.3.

Al calcular el total de los valores de $\hat{\gamma}(h)$ y graficarlos contra h se obtiene el semivariograma, ajustando un

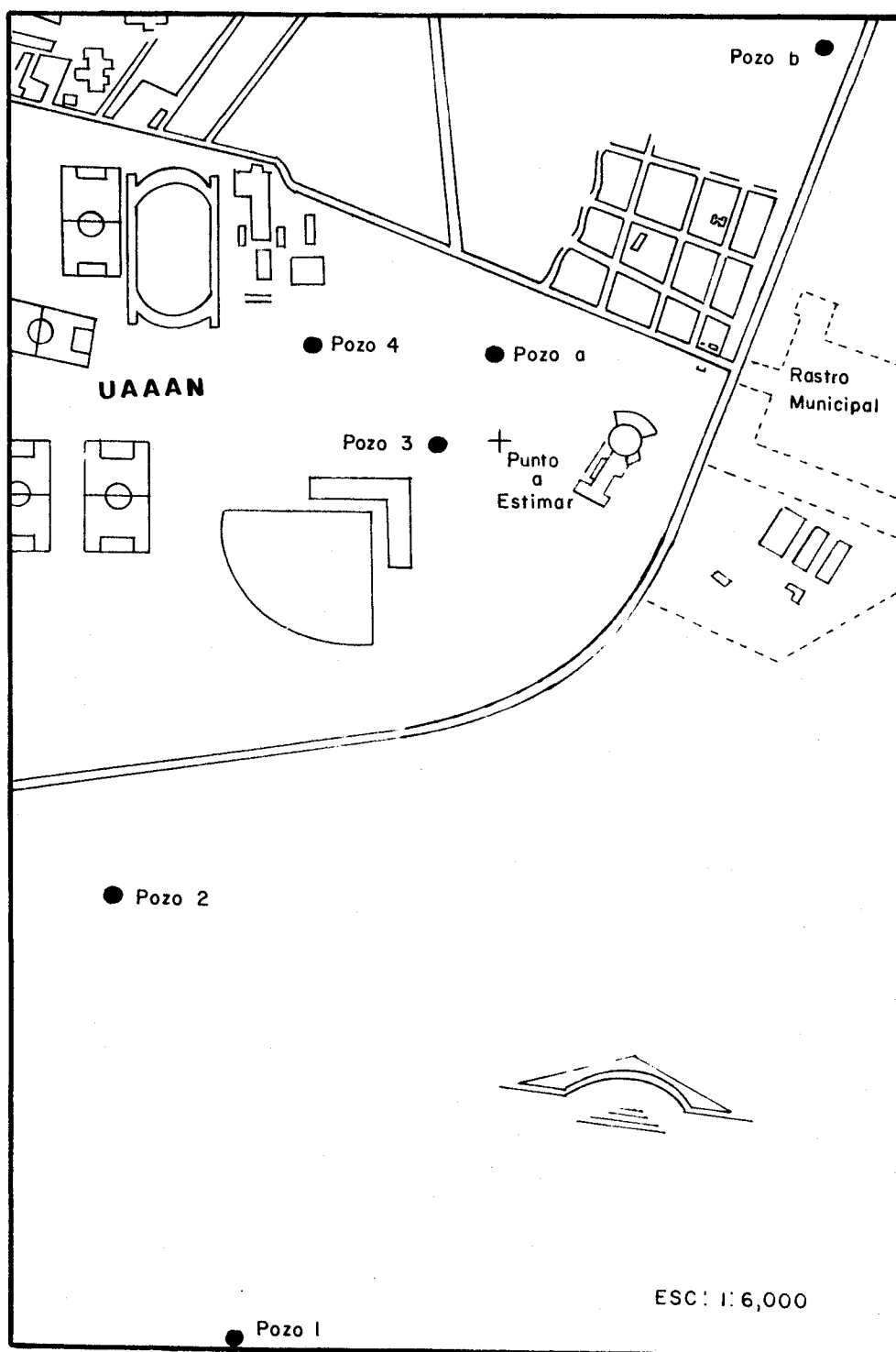


Figura 3.2. Localización de los pozos de producción de agua para observaciones de niveles dinámicos.

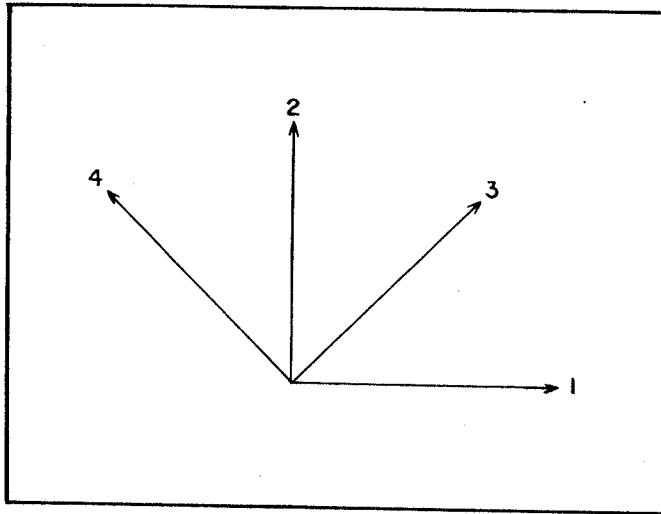


Figura 3.3. Direcciones de cálculo del semivariograma (tomado de Ramírez, 1980).

modelo teórico de los ya señalados, o algún otro, seleccionando aquél que presente el coeficiente de correlación más alto.

Por lo que respecta a las observaciones irregularmente espaciadas, el semivariograma es estimado por la ecuación (3) donde las observaciones se agrupan de acuerdo a intervalos de distancia.

Interpolación Kriging

Una vez obtenidos los semivariogramas, se procede al método de interpolación Kriging, para la estimación de valores de las variables en puntos no medidos, o la estimación de valores en puntos medidos, con la finalidad de validar al método. El procedimiento se presenta en el diagrama de flujo de la Figura 3.4.

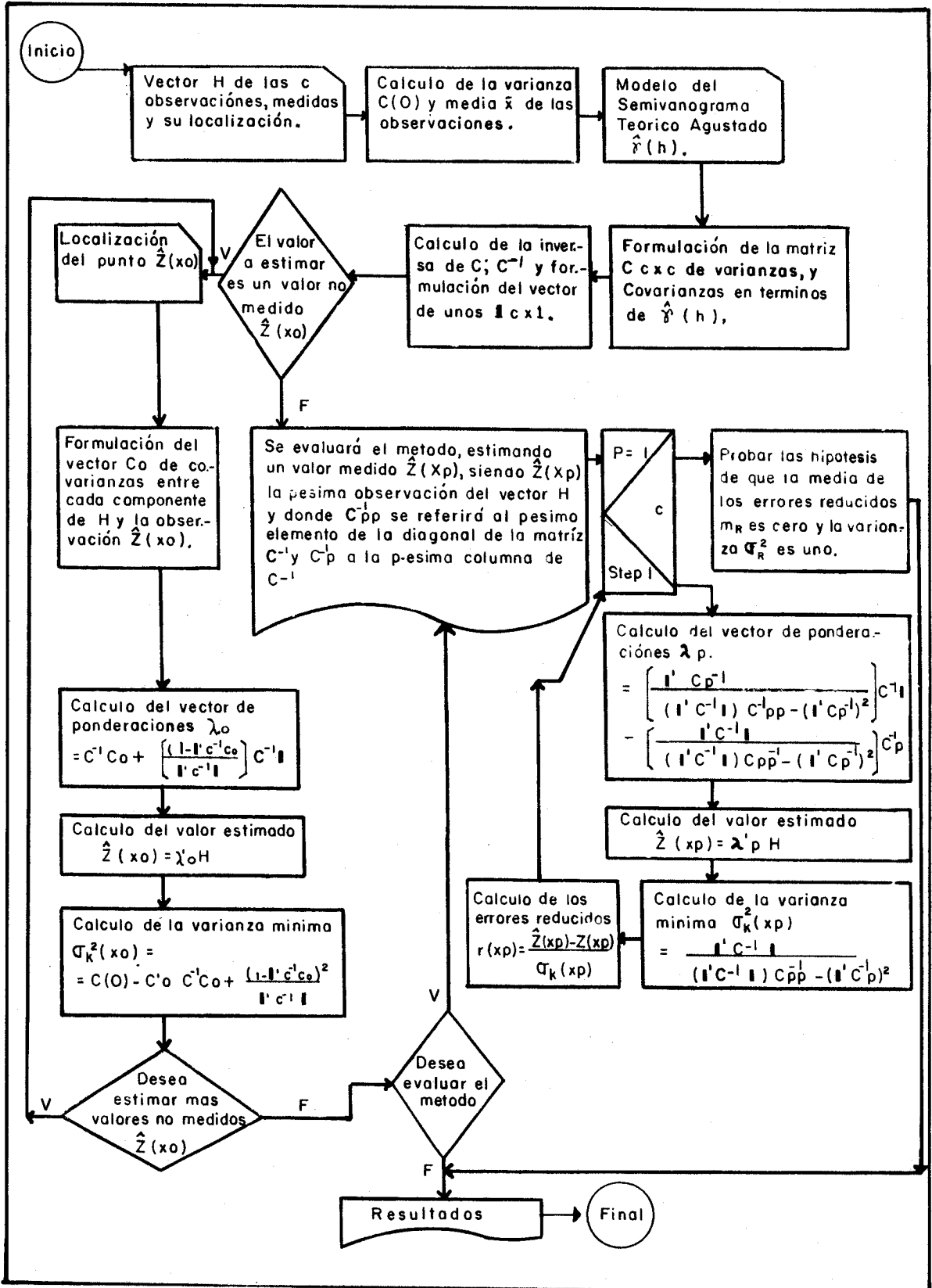


Figura 3.4. Diagrama de flujo para la interpolación Kriging.

Estimación del Error

La variable a ser estimada es generalmente en algo diferente al valor medido. Así se tiene una serie de n valores medidos, $Z(x_i)$ y es posible obtener una serie de n valores estimados para localidades idénticas, $\hat{Z}(x_i)$. Esto se logra aplicando en forma iterativa la interpolación Kriging, tal como se señala en el diagrama de flujo de la Figura 3.4. Así entonces es posible calcular una serie de n errores reducidos de acuerdo a la ecuación (54), lo cual permite hacer inferencias estadísticas. Es decir, bajo la asunción de distribución normal de los errores reducidos, se plantea la siguiente hipótesis:

$$H_0: m_R = 0$$

$$H_a: m_R \neq 0$$

Donde m corresponde a la media de los errores reducidos de tal forma que:

$$t_c = \frac{\sqrt{n} (\bar{x} - m)}{s} \quad (86)$$

Siendo n el número total de errores reducidos, \bar{x} la media y s la desviación de la serie de los errores reducidos. Bajo la teoría de normalidad, t_c se distribuye como una t -student con $n - 1$ grados de libertad (g.l.) si y sólo si $H_0: m_R = 0$ es cierta. La regla de decisión es: rechazar $H_0: m_R = 0$ si $|t_c| \geq t_{\alpha/2(n-1)}$ g.l. (Ostle, 1983). α será el nivel de significancia. Un intervalo de confianza para m_R , basado sobre la distribución t -student, con una confianza -

del 95 por ciento (Snedecor y Cochran, 1967) es:

$$\bar{x} - t_{0.05(n-1)g.l.} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq m_R \leq \bar{x} + t_{0.05(n-1)g.l.} \frac{S}{\sqrt{n}} \quad (87)$$

De la misma forma, bajo asunción de normalidad, se plantea la hipótesis:

$$H_0: \sigma_R^2 = 1$$

$$H_a: \sigma_R^2 \neq 1$$

Donde σ_R^2 corresponde a la varianza de los errores reducidos que bajo la teoría de normalidad

$$\chi_c^2 = \frac{(n-1)S}{\sigma_R^2} \quad (88)$$

de tal manera que χ^2 se distribuirá como una χ_c^2 con $(n-1)$ g.l. si y sólo si $H_0: \sigma_R^2 = 1$ es cierta, la regla de decisión es: se rechaza $H_0: \sigma_R^2 = 1$ si $\chi^2 \geq \chi_{\alpha/2, (n-1)g.l.}^2$ o si $\chi_c^2 \leq \chi_{1-\alpha/2, (n-1)g.l.}^2$ (Ostle, 1983). Bajo la teoría normal un intervalo de confianza para σ_R^2 con un 95 por ciento de confiabilidad (Snedecor y Cochran, 1967) es:

$$\frac{\sum_{i=1}^n [r(x_p)]^2}{\chi_{(0.025), (n-1)g.l.}^2} < \sigma_R^2 < \frac{\sum_{i=1}^n [r(x_p)]^2}{\chi_{(0.975), (n-1)g.l.}^2} \quad (89)$$

RESULTADOS Y DISCUSION

Se mostrará el método Kriging en observaciones regularmente espaciadas, utilizando los datos del Cuadro 3.1, - que pertenecen a profundidades de nivel freático observados en diciembre de 1980, en el Ejido Parras, Municipio de Parras, Coah. También el método se aplicará a observaciones - irregularmente espaciadas, usando los datos del Cuadro 3.2, pertenecientes a la profundidad de niveles dinámicos observados en noviembre de 1987 en pozos de SAPAC y de la UAAAN, situados en un acuífero de conglomerado de calizas.

Semivariogramas

Observaciones Regularmente Espaciadas

El cálculo de la estimación del semivariograma de acuerdo a la ecuación (2), proporciona los resultados del Cuadro 4.1.

Graficando los valores de h contra $\hat{\gamma}(h)$ se obtendrá el semivariograma de la Figura 4.1, donde se han ajustado los modelos teóricos siguientes:

Modelo lineal

$$\hat{\gamma}(h) = 0.2818259 + (5.897503E-04)h \quad r^2 = 0.7603163$$

Cuadro 4.1. Distancias y $\hat{\gamma}(h)$ calculados para niveles freáticos de diciembre de 1980, en el Ejido Parras

No.	h	N(h)	$\hat{\gamma}(h)$
1	150.00	45	0.244
2	212.13	36	0.328
3	300.00	34	0.480
4	335.41	54	0.510
5	424.26	20	0.640
6	450.00	23	0.522
7	474.34	36	0.613
8	540.73	26	0.700
9	600.00	12	0.724
10	618.47	18	0.815
11	636.40	8	0.596
12	670.82	12	0.733
13	750.00	14	0.588
14	764.85	12	0.631
15	807.77	8	0.674
16	874.64	4	0.726
17	900.00	4	0.822
18	912.41	6	0.815
19	948.68	4	0.858
20	1006.23	2	0.917

Modelo exponencial de la forma

$$\hat{\gamma}(h) = (0.317828) \text{EXP}[(1.077888\text{E}-03)(h)]; \text{ con } r^2 = 0.7129533$$

Modelo logarítmico

$$\hat{\gamma}(h) = -1.240146 + (0.2985545) \text{Ln}(h) \text{ con } r^2 = 0.8167976$$

Modelo potencial

$$\hat{\gamma}(h) = (1.644745 \text{ E}-02) (h)^{0.5741396} \text{ con } r^2 = 0.8479261$$

Modelo polinomial de tercer grado

$$\hat{\gamma}(h) = -0.3099664 + (4.394738 \text{ E}-03)h - (6.81085\text{E}-06) (h)^2 + \\ (3.636808\text{E}-09) (h)^3; \text{ con } r^2 = 0.8727339$$

Modelo polinomial de cuarto grado

$$\hat{\gamma}(h) = 5.365413\text{E}-02 + (7.526398\text{E}-04)h + (4.751722\text{E}-06) (h)^2 \\ -(1.085944\text{E}-08) (h)^3 + (6.244813\text{E}-12) (h)^4 \text{ con } r^2 = 0.8854184$$

Modelo exponencial de la forma:

$$\hat{\gamma}(h) = -0.069171 + 0.920596 \left[1 - \text{EXP}\left(-\frac{h}{a_0}\right) \right] \text{ con } r^2 = 0.806419$$

Donde $a_0 = 353.18$ m, valor de h correspondiente al -
valor de $\hat{\gamma}(h) = 0.544 = \text{Var}[Z(x_i)] = \text{umbral}$. También $a_0 = \frac{a}{3}$

Siendo a el rango y , por lo tanto $a = 1059.54$ m.

Modelo Gaussiano

$$\hat{\gamma}(h) = 0.142325 + 0.604806 \left[1 - \text{EXP}\left(-\frac{h^2}{a_0^2}\right) \right] \text{ con } r^2 = 0.763656$$

Donde $a_0 = \sqrt{\frac{1}{3}} a$; igual que el modelo anterior, $a_0 = 353.18$ m, lo que implica que el rango $a = 611.7257$ m.

Modelo esférico

$$\hat{\gamma}(h) = -0.018774 + 0.635386 \left[\frac{3}{2} \left(\frac{h}{a} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{a} \right)^3 \right] \text{ para } 0 \leq h \leq a$$

$$\hat{\gamma}(h) = -0.018774 + 0.635386 \text{ para } h \geq a \text{ con } r^2 = 0.923805$$

Donde a es el rango igual a 529.77 m, obtenido de $a' = \frac{2}{3} a$ distancia donde se tiene el umbral = $\text{Var } Z(x_i) = 0.544$.

Analizando los modelos teóricos ajustados, se observa que el modelo esférico tiene mayor valor del coeficiente de determinación, r^2 , que implicará un valor alto del coeficiente de correlación, r , el cual es una estimación del coeficiente de correlación poblacional ρ y que describe la correlación entre h y $\hat{\gamma}(h)$. Por lo tanto, se seleccionará para la interpolación Kriging en observaciones regularmente espaciadas al modelo esférico, cuya gráfica se presenta en la Figura 4.1. El rango del semivariograma es estimado en 529.77 m, distancia que determina la dependencia espacial entre las observaciones de nivel freático.

Observaciones Irregularmente Espaciadas

Por lo que respecta a las observaciones irregularmente espaciadas, utilizando los datos del Cuadro 3.2 y Figura 3.2, que corresponden a los niveles dinámicos de los pozos de producción de agua de SAPAC y de la UAAAN, y

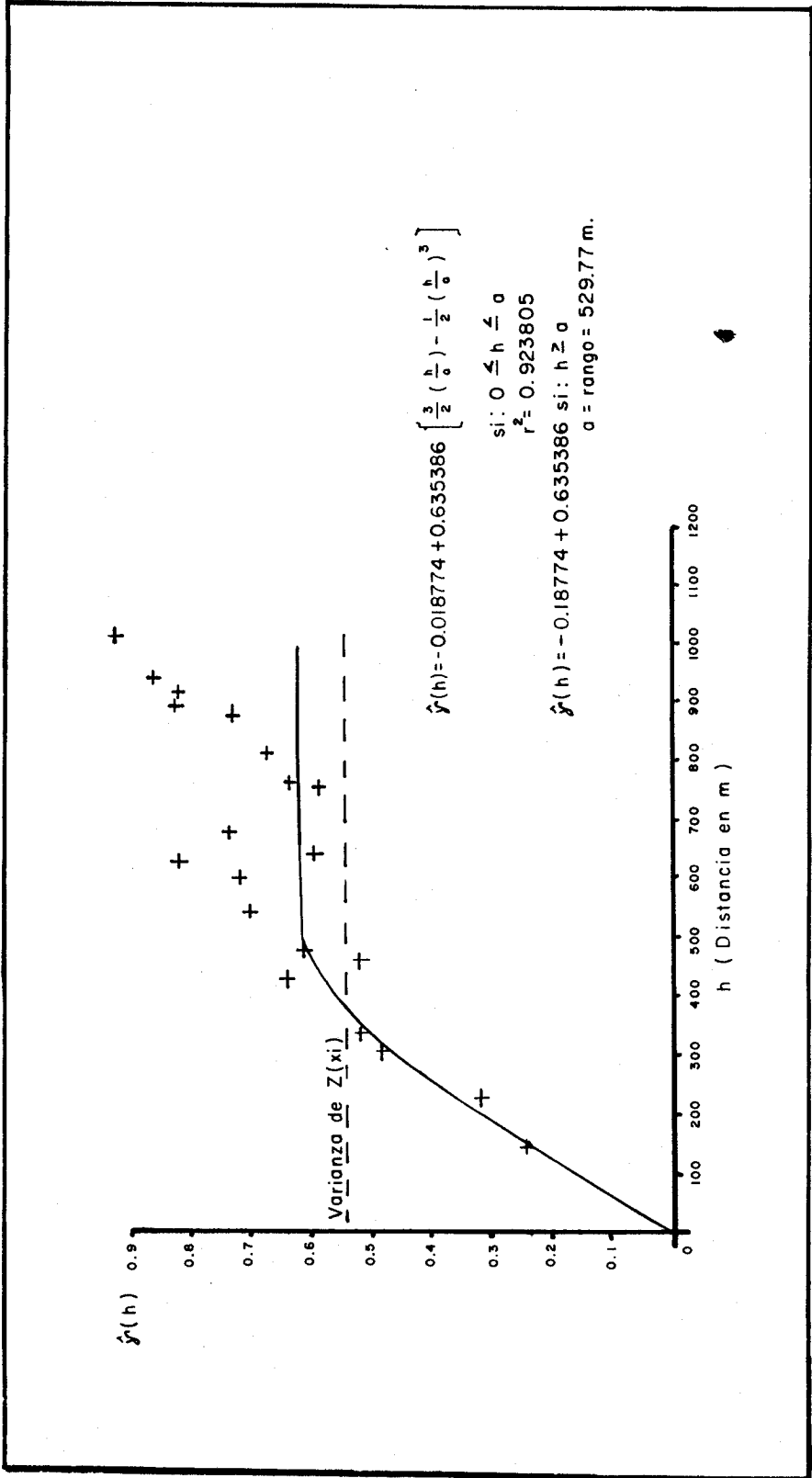


Figura 4.1. Semivariograma teórico ajustado para observaciones de nivel freático.

aplicando la ecuación 3 para la estimación del semivariograma, se obtienen los resultados del Cuadro 4.2.

Cuadro 4.2. Distancias y $\hat{\gamma}(h)$ calculados para la profundidad de niveles dinámicos de los pozos de SAPAC y UAAAN.

No.	h	$\hat{\gamma}(h)$
1	117.6435	8.0000
2	117.8007	18.0000
3	169.0118	2.0000
4	464.3458	144.5000
5	560.6791	0.5000
6	568.4936	220.5000
7	580.0759	60.5000
8	602.5488	312.5000
9	614.1857	112.5000
10	683.7968	364.5000
11	1051.2870	242.0000
12	1118.8660	338.0000
13	1126.3240	50.0000
14	1150.5930	392.0000
15	1523.6080	60.5000

Al graficar los valores de h contra $\hat{\gamma}(h)$ se obtiene el semivariograma de la Figura 4.2, ajustando los modelos teóricos siguientes:

Modelo lineal

$$\hat{\gamma}(h) = 55.47127 + (0.14297)h; \quad \text{con } r^2 = 0.1731674$$

Modelo exponencial de la forma

$$\hat{\gamma}(h) = (11.55025) \text{EXP} [(2.335575\text{E}-03h)]; \quad \text{con } r^2 = 0.2327326$$

Modelo logarítmico

$$\hat{\gamma}(h) = -429.5872 + (92.73046)\text{Ln}(h); \text{ con } r^2 = 0.2760324$$

Modelo potencial

$$\hat{\gamma}(h) = (9.809225\text{E}-03)h^{(1.37959)}; \text{ con } r^2 = 0.3076869$$

Modelo polinomial de tercer grado

$$\hat{\gamma}(h) = (-20.8234) + (0.1429)h + (5.4921\text{E}-04)h^2 - (4.0017\text{E}-07)h^3$$

con $r^2 = 0.4478892$

Modelo exponencial de la forma

$$\hat{\gamma}(h) = -43.3728 + 313.8574 [1 - \text{EXP}(-h/a_0)] \text{ con } r^2 = 0.2878$$

Donde $a_0 = 566.1871$ m, valor de h correspondiente al valor de $\hat{\gamma}(h) = 155.0668 = \text{Var}[Z(x_i)] = \text{umbral}$. También: $a_0 = a/3$ siendo a el rango y por lo tanto $a = 1,698.5613$ m

Modelo Gaussiano

$$\hat{\gamma}(h) = 3.6165 + 236.1833 [1 - \text{EXP}(-h^2/a_0^2)] \text{ con } r^2 = 0.3193$$

Donde $a_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} a$; igual que el modelo anterior, $a_0 = 566.1871$ m, lo que implica que el rango $a = 980.6648$.

Modelo Esférico

$$\hat{\gamma}(h) = -64.1167 + 279.6241 \left[\frac{3}{2} \left(\frac{h}{a} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{a} \right)^3 \right] \text{ para } 0 \leq h \leq a$$

$$\hat{\gamma}(h) = -64.1167 + 279.6241 \text{ para } h \geq a \text{ con } r^2 = 0.4110$$

Donde a es el rango igual a 849.2807 m, obtenido de

$a' = \frac{2}{3} a$, distancia donde se tiene el umbral $\text{Var}[Z(x_i)] = 155.0668$.

Se observa que el modelo polinomial de tercer grado, tiene mayor valor del coeficiente de determinación, r^2 , que implicará un valor alto del coeficiente de correlación r , - comparado con los demás modelos teóricos ajustados. Por esta razón se seleccionará al modelo polinomial de tercer grado - para la interpolación Kriging en observaciones irregularmente espaciadas. La gráfica correspondiente se presenta en la Figura 4.2, ahí se observa que la distancia que determina la dependencia espacial entre las observaciones de nivel dinámico es estimada en 1031.6564 m, que será el rango del semivariograma.

Interpolación Kriging

Al tener los valores de las variables de interés, la distancia entre ellas y al haber encontrado la dependencia espacial entre las observaciones, detectada a través del semivariograma teórico ajustado, se procede a la interpolación Kriging, iniciando con la formulación de la matriz C de varianzas y covarianzas estimada en términos de $\hat{\gamma}(h)$, tal como lo señala el diagrama de flujo de la Figura 3.4.

Observaciones Regularmente Espaciadas

Dado que el mejor modelo teórico ajustado del semivariograma correspondiente a las observaciones de nivel freático presentadas en el Cuadro 3.1, es:

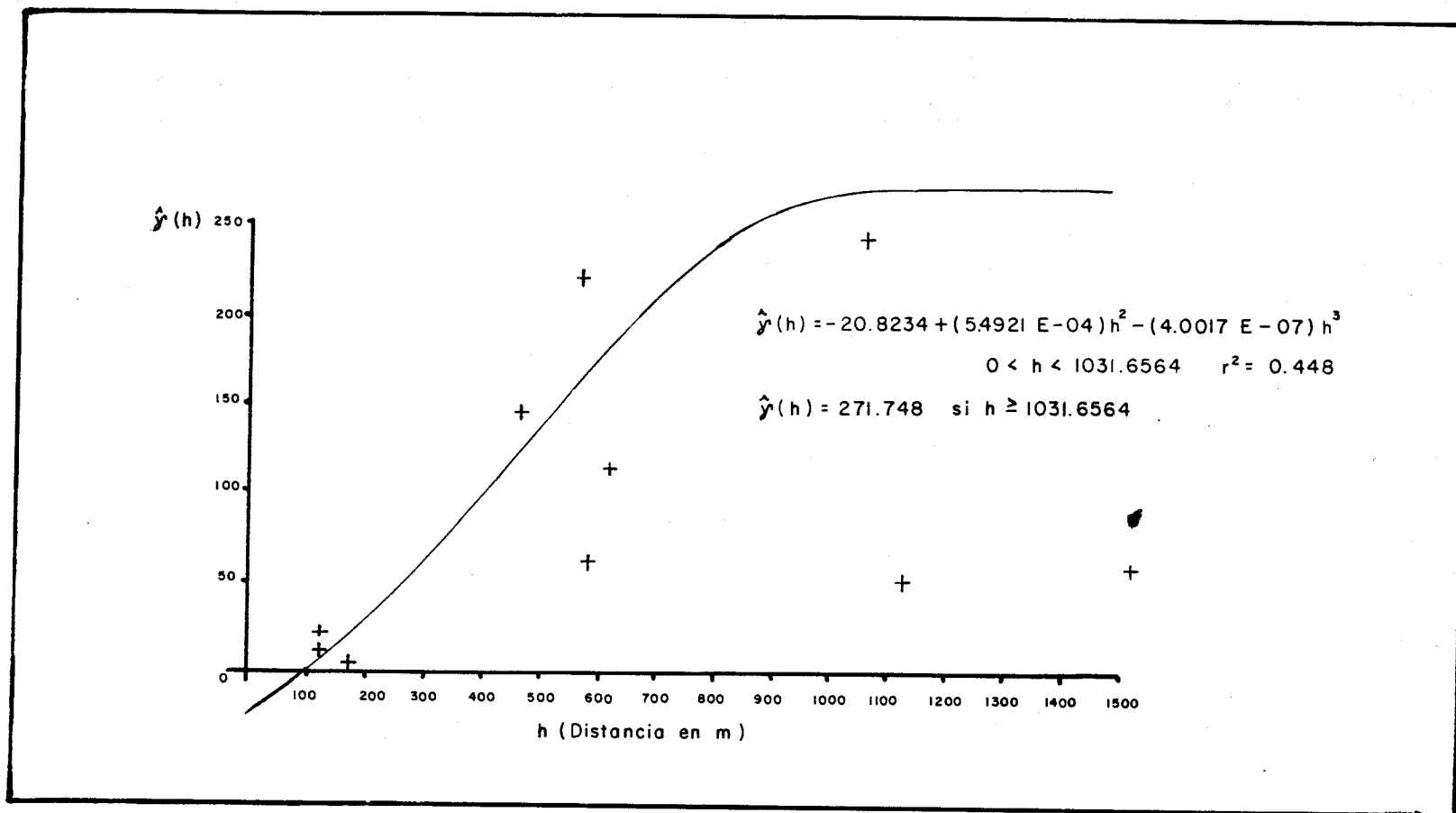


Figura 4.2. Semivariograma teórico ajustado para observaciones de niveles dinámicos.

$$\hat{\gamma}(h) = -0.018774 + 0.635386 \left[\frac{3}{2} \left(\frac{h}{a} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{a} \right)^3 \right] \text{ para } 0 \leq h \leq a$$

$$\hat{\gamma}(h) = -0.018774 + 0.635383 \text{ para } h \geq a$$

Donde a es el rango igual a 529.77 m, la matriz \hat{C} de varianzas y covarianzas en términos de $\hat{\gamma}(h)$ será de la forma:

$$\hat{C} = \hat{C}(x_i, x_j) = \begin{vmatrix} \hat{C}(x_1, x_1) & \hat{C}(x_1, x_2) & \hat{C}(x_1, x_3) & \hat{C}(x_1, x_4) \\ \hat{C}(x_2, x_1) & \hat{C}(x_2, x_2) & \hat{C}(x_2, x_3) & \hat{C}(x_2, x_4) \\ \hat{C}(x_3, x_1) & \hat{C}(x_3, x_2) & \hat{C}(x_3, x_3) & \hat{C}(x_3, x_4) \\ \hat{C}(x_4, x_1) & \hat{C}(x_4, x_2) & \hat{C}(x_4, x_3) & \hat{C}(x_4, x_4) \end{vmatrix}$$

Donde, de acuerdo a la ecuación (83)

$$\begin{aligned} \hat{C}(x_1, x_1) &= \hat{C}(x_2, x_2) = \hat{C}(x_3, x_3) = \hat{C}(x_4, x_4) \\ &= \hat{C}(0) = \hat{\gamma}(0) = 0.544 - (-0.018774) = 0.5628 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{C}(x_1, x_2) &= \hat{C}(x_2, x_1) = \hat{C}(x_2, x_3) = \hat{C}(x_3, x_2) = \hat{C}(x_3, x_4) = \hat{C}(x_4, x_3) \\ &= \hat{C}(0) - \hat{\gamma}(150) = 0.544 - 0.243871 = 0.3001 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{C}(x_1, x_3) &= \hat{C}(x_3, x_1) = \hat{C}(x_2, x_4) = \hat{C}(x_4, x_2) \\ &= \hat{C}(0) - \hat{\gamma}(300) = 0.544 - 0.463248 = 0.0808 \end{aligned}$$

$$\hat{C}(x_1, x_4) = \hat{C}(x_4, x_1) = \hat{C}(0) - \hat{C}(450) = 0.544 - 0.596088 = -0.0521$$

De tal forma que:

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} 0.5628 & 0.3001 & 0.0808 & -0.0521 \\ 0.3001 & 0.5628 & 0.3001 & 0.0808 \\ 0.0808 & 0.3001 & 0.5628 & 0.3001 \\ -0.0521 & 0.0808 & 0.3001 & 0.5628 \end{bmatrix}$$

De aquí;

$$\hat{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 2.6174 & -1.6109 & 0.3223 & 0.3017 \\ -1.6109 & 3.5740 & -1.8464 & 0.3223 \\ 0.3223 & -1.8464 & 3.5740 & -1.6109 \\ 0.3017 & 0.3223 & -1.6109 & 2.6174 \end{bmatrix}$$

Se aplicará la metodología Kriging, en primer término, para estimar un valor no medido, $z(x_0)$, localizado en una posición x_0 respecto a un origen. Posteriormente se aplicará la metodología Kriging para estimar valores medidos, $\hat{z}(x_p)$, en las mismas localizaciones donde se obtuvieron las observaciones, $z(x_i)$, con el propósito de evaluar el método, a través de los errores reducidos $r(x_p)$.

Si se quiere estimar el valor de profundidad del nivel freático, a una distancia de 50 m ($x_0 = 50$ m) del punto de origen 1A (hilera y columna respectivamente) en la dirección de los puntos 1B, 1C, 1D. El vector de covarianzas, C_0 , entre cada observación $z(x_i)$ y la observación a estimar $\hat{z}(x_0)$ es de la forma:

$$\hat{C}_0 = \begin{bmatrix} \hat{C}(x_1, x_0) \\ \hat{C}(x_2, x_0) \\ \hat{C}(x_3, x_0) \\ \hat{C}(x_4, x_0) \end{bmatrix}$$

Donde, de acuerdo a la ecuación (83)

$$\hat{C}(x_1, x_0) = \hat{C}_0(50) = C(0) - \hat{\gamma}(50) = 0.544 - 0.070911 = 0.4731$$

$$\hat{C}(x_2, x_0) = \hat{C}_0(100) = C(0) - \hat{\gamma}(100) = 0.544 - 0.158994 = 0.3850$$

$$\hat{C}(x_3, x_0) = \hat{C}_0(250) = C(0) - \hat{\gamma}(250) = 0.544 - 0.397601 = 0.1464$$

$$\hat{C}(x_4, x_0) = \hat{C}_0(400) = C(0) - \hat{\gamma}(400) = 0.544 - 0.564094 = -0.0201$$

De tal forma que:

$$\hat{C}_0 = \begin{bmatrix} 0.4731 \\ 0.3850 \\ 0.1464 \\ -0.0201 \end{bmatrix}$$

El vector de ponderaciones λ_0 bajo la estructura de la ecuación (66)

$$\lambda_0 = C^{-1}C_0 + \left[\frac{\mathbf{1}'C^{-1}C_0}{\mathbf{1}'C^{-1}\mathbf{1}} \right] C^{-1}\mathbf{1}$$

Donde $\mathbf{1}$ es un vector de unos de la forma:

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

es:

$$\lambda_0 = \begin{bmatrix} 0.6703 \\ 0.3401 \\ 0.0002 \\ -0.0106 \end{bmatrix}$$

El valor estimado, $\hat{Z}(x_0) = \lambda_0'H$ donde H es el vector de observaciones conocidas en la dirección de $1A-1D$ en función de la localización del punto a estimar es, de acuerdo a el Cuadro 3.1:

$$H' = [1.51 \quad 1.82 \quad 2.23 \quad 2.20]$$

Por lo tanto; $\hat{Z}(x_0) = \hat{Z}(50m) = 1.6083$ m, que tendrá una varianza mínima $\sigma_K^2(x_0)$ igual a:

$$\sigma_K^2(x_0) = C(0) - C_0' C^{-1} C_0 + \frac{(1 - \mathbf{1}' C^{-1} C_0)^2}{\mathbf{1}' C^{-1} \mathbf{1}} = 0.1025$$

Por lo que respecta a la evaluación de la metodología Kriging, se observa en el diagrama de flujo de la Figura 3.4 que la matriz C no depende de la localización del valor a estimar, esto es aprovechado para seguir un proceso iterativo y obtener una serie de estimaciones, para las mismas localizaciones medidas, y así encontrar el error que existe entre el valor estimado y el observado. Como se comentó anteriormente, se prefiere el uso de los errores reducidos

$$r(x_p) = \frac{\hat{Z}(x_p) - Z(x_p)}{\sigma_K(x_p)}$$

Los resultados correspondientes a los errores reducidos para las observaciones de nivel freático utilizando el método Kriging se muestran en el Cuadro 4.3.

Del Cuadro 4.3, asumiendo distribución normal de los errores reducidos, se plantea la hipótesis de:

$$H_0: m_R = 0$$

$$H_a: m_R \neq 0$$

Siendo m_R la media de los errores reducidos, de tal forma que, aplicando la ecuación (86) se tiene:

$$t_c = \frac{\sqrt{28} (-0.01738 - 0)}{0.67778} = -0.13569$$

Cuadro 4.3. Errores reducidos al aplicar la metodología Kriging para observaciones de nivel freático.

Localización	$z(x_p)$	$\hat{z}(x_p)$	$\sigma_K(x_p)$	$r(x_p)$
1A	1.51	1.8542	0.71155	0.48373
2A	1.68	1.7462	0.71155	0.09304
3A	2.41	1.7431	0.71155	-0.93725
4A	1.30	1.4296	0.71155	0.18214
5A	0.93	1.7730	0.71155	1.18474
6A	2.80	2.7262	0.71155	-0.10372
7A	3.10	3.1918	0.71155	0.12901
1B	1.82	1.8672	0.53245	0.08865
2B	1.67	1.8998	0.53245	0.43159
3B	1.65	1.4778	0.53245	-0.32341
4B	1.36	1.4835	0.53245	0.23195
5B	1.75	1.0395	0.53245	-1.33440
6B	2.67	2.8410	0.53245	0.32116
7B	3.20	3.2031	0.53245	0.00582
1C	2.23	2.0253	0.53245	-0.38445
2C	2.14	1.9983	0.53245	-0.26613
3C	0.62	1.6634	0.53245	1.95963
4C	1.69	1.6407	0.53245	-0.09259
5C	1.19	1.7291	0.53245	1.01249
6C	2.90	2.8820	0.53245	-0.03381
7C	3.30	3.2042	0.53245	-0.17992
1D	2.20	2.1369	0.71155	-0.08868
2D	2.32	2.0962	0.71155	-0.31453
3D	1.74	0.8507	0.71155	-1.24981
4D	1.91	1.6477	0.71155	-0.36863
5D	1.64	1.1028	0.71155	-0.75497
6D	3.10	2.9001	0.71155	-0.28094
7D	3.20	3.2731	0.71155	0.10273

\bar{x} = media de la serie de los $r(x_p)$ = -0.01738

S = desviación de la serie de los $r(x_p)$ = 0.67778

n = número total de la serie de los $r(x_p)$ = 28

La regla de decisión es

Rechazar $H_0: m_R = 0$ si $|t_c| \geq t_{\alpha/2(n-1)g.l.}$. Si el nivel de significancia α es 0.05 $t_{\alpha/2(n-1)g.l.}$ será igual a:

$$t_{0.025(27)g.l.} = 2.373$$

Por lo tanto, no se rechaza $H_0: m_R = 0$ bajo un nivel de significancia α de 0.05.

Un intervalo de confianza basado sobre la distribución t-student, con una confiabilidad del 95 por ciento, es, de acuerdo a la ecuación (87):

$$(-0.13569) - (2.052) \left(\frac{0.67778}{\sqrt{28}} \right) \leq m_R \leq (-0.13569) + (2.052) \left(\frac{0.67778}{\sqrt{28}} \right)$$

$$- 0.39827 \leq m_R \leq 0.12689$$

También asumiendo normalidad de los errores reducidos, se plantea la hipótesis de:

$$H_0: \sigma_R^2 = 1$$

$$H_a: \sigma_R^2 \neq 1$$

Donde σ_R^2 corresponde a la varianza de los errores reducidos. Así, aplicando la ecuación (88) donde:

$$\chi_C^2 = \frac{(27)(0.67778)}{1.0} = 18.30006$$

La regla de decisión es: Se rechaza $H_0: \sigma_R^2 = 1$ si:

$$\chi_C^2 \geq \chi_{\alpha/2(n-1)g.l.}^2 \text{ o si } \chi_C^2 \leq \chi_{1-\alpha/2(n-1)g.l.}^2$$

Si el nivel de significancia α es 0.05

$$\chi^2_{\alpha/2(n-1)g.l.} = \chi^2_{(0.025)(27)g.l.} = 43.19$$

y

$$\chi^2_{1-\alpha/2(n-1)g.l.} = \chi^2_{(0.975)(27)g.l.} = 14.57$$

Por lo que no se rechaza $H_0: \sigma_R^2 = 1$ bajo un nivel de significancia α de 0.05

Un intervalo de confianza para σ_R^2 con un 95 por ciento de confiabilidad de acuerdo a la ecuación (89) es:

$$\frac{12.41181}{43.19} < \sigma_R^2 < \frac{12.41181}{14.57}$$

$$0.28738 < \sigma_R^2 < 0.85187$$

Observaciones Irregularmente Espaciadas

En este caso el mejor modelo teórico ajustado de semi-variograma correspondiente a las observaciones de niveles dinámicos del Cuadro 3.2, fue:

$$\hat{\gamma}(h) = -20.8245 + (0.1429)h + (5.4921 \text{ E-}04)h^2 - (4.0017 \text{ E-}07)h^3$$

Encontrándose un máximo en $h = 1031.6564$ m. Así, el rango queda definido por esta distancia, y por lo tanto, el modelo será aplicable en la forma siguiente:

$$\hat{\gamma}(h) = -20.8234 + (0.1429)h + (5.4921 \text{ E-}04)h^2 - (4.0017 \text{ E-}07)h^3$$

cuando $0 \leq h < 1031.6564$ m

$$\hat{\gamma}(h) = 271.748 \quad \text{cuando } h \geq 1031.6564 \text{ m.}$$

De tal forma que la matriz de varianzas y covarianzas en términos de $\hat{\gamma}(h)$ bajo la ecuación (83) es:

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} 175.8234 & 31.1776 & 116.6812 & -50.6822 & 152.0881 & 137.9806 \\ 31.1776 & 175.8234 & -116.6812 & -116.6812 & -13.7011 & -26.3432 \\ -116.6812 & -116.6812 & 175.8234 & -6.3533 & -116.6812 & -116.6812 \\ -50.6822 & -116.6812 & -6.3530 & 175.8234 & -9.3258 & -22.0747 \\ 152.0881 & -13.7011 & -116.6812 & -9.3258 & 175.8234 & 152.1283 \\ 137.9806 & -26.3432 & -116.6812 & -22.0741 & 152.1283 & 175.8234 \end{bmatrix}$$

De aquí:

$$\hat{C}^{-1} = \begin{bmatrix} .0320 & -.0026 & .0021 & .0060 & -.0237 & -.0028 \\ -.0026 & -.0068 & -.0112 & -.0066 & .0008 & -.0079 \\ .0021 & -.0112 & -.0062 & -.0081 & .0003 & -.0088 \\ .0060 & -.0066 & -.0081 & .0017 & -.0063 & -.0054 \\ -.0237 & .0008 & .0003 & -.0063 & .0415 & -.0178 \\ -.0028 & -.0079 & -.0088 & -.0054 & -.0178 & .0156 \end{bmatrix}$$

Si el punto a estimar $Z(x_0)$ se encuentra en las coordenadas (310, 1044), el vector \hat{C}_0 bajo la aplicabilidad del modelo teórico ajustado del semivariograma y usando ecuación (83) es:

$$\hat{C}_0 = \begin{bmatrix} 156.45319 \\ 5.21355 \\ -116.68120 \\ -20.90793 \\ 161.54074 \\ 131.93845 \end{bmatrix}$$

El vector de ponderaciones λ_0 según ecuación (66) es:

$$\lambda_0 = \begin{bmatrix} 0.442 \\ 0.009 \\ -0.0069 \\ .0383 \\ .7390 \\ -.2216 \end{bmatrix}$$

El valor estimado $\hat{Z}(x_0) = \lambda_0'H$, siendo H el vector de observaciones del Cuadro 3.2, es decir:

$$H = \begin{bmatrix} 43 \\ 60 \\ 71 \\ 70 \\ 49 \\ 45 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $\hat{Z}(x_0) = \hat{Z}(310, 1044) = 47.9851$ m, y tendrá una varianza mínima de acuerdo a la ecuación (67) de:

$$\sigma_R^2(x_0) = 18.70404$$

En lo que se refiere a la evaluación de la metodología Kriging, se obtienen los errores reducidos presentados en el Cuadro 4.4, para posteriormente realizar inferencias estadísticas, en cuanto a la media y varianza de los errores reducidos.

Asumiendo distribución normal de los errores reducidos, se plantea la hipótesis de:

$$H_0: m_R = 0$$

$$H_a: m_R \neq 0$$

Cuadro 4.4. Errores reducidos al aplicar la metodología Kriging para observaciones de niveles dinámicos.

Pozo	$Z(x_p)$	$\hat{Z}(x_p)$	$\sigma_K(x_p)$	$r(x_p)$
ã	43	48.5889	5.4932	-1.0174
b	60	48.5696	15.2777	0.7482
1	71	64.4536	17.1816	0.3810
2	70	65.5666	14.1497	0.3133
3	49	45.0132	4.8938	0.8147
4	45	48.3235	6.6638	-0.4987

\bar{x} = media de la serie de los $r(x_p) = 0.1235$

S = desviación de la serie de los $r(x_p) = 0.7293$

n = número total de la serie de los $r(x_p) = 6$

m_R es la media de los errores reducidos y aplicando la ecuación (86) se tiene que:

$$t_c = \frac{\sqrt{6} (0.1235 - 0)}{0.7293} = 0.4148$$

La regla de decisión es:

Rechazar $H_0: m_R = 0$ si $|t_c| \geq t_{\alpha/2} (n-1)_{g.l.}$ bajo $\alpha = 0.05$

$$t_{0.025(5)_{g.l.}} = 3.163$$

Por lo tanto, no se rechaza $H_0: m_R = 0$.

Un intervalo de confianza con una confiabilidad del 95 por ciento, de acuerdo a la ecuación (87) es:

$$(0.1235) - 2.571 \left(\frac{0.7293}{\sqrt{6}} \right) \leq m_R \leq (0.1235) + 2.571 \left(\frac{0.7293}{\sqrt{6}} \right)$$

$$- 4.4694 \leq m_R \leq 4.7164$$

También asumiendo normalidad de los errores reducidos, se plantea la hipótesis de:

$$H_0: \sigma_R^2 = 1$$

$$H_a: \sigma_R^2 \neq 1$$

Siendo σ_R^2 la varianza de los errores reducidos. Aplicando la ecuación (88)

$$\chi_C^2 = \frac{(5)(0.7293)}{1.0} = 3.6465$$

La regla de decisión es: se rechaza $H_0: \sigma_R^2 = 1$ si $\chi_C^2 \geq \chi_{\alpha/2(n-1)g.l.}^2$ o si $\chi_C^2 \leq \chi_{1-\alpha/2(n-1)g.l.}^2$ si el nivel de significancia α es 0.05

$$\chi_{(0.025)(5)g.l.}^2 = 12.83$$

$$\chi_{(0.975)(5)g.l.}^2 = 0.83$$

Por lo tanto, no se rechaza $H_0: \sigma_R^2 = 1$

Un intervalo de confianza para σ_R^2 con un 95 por ciento de confiabilidad, de acuerdo a la ecuación (89) es:

$$\frac{2.7507}{12.83} < \sigma_R^2 < \frac{2.7507}{0.83}$$

$$0.2144 < \sigma_R^2 < 3.3141$$

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

1. Encontrar si existe la dependencia espacial entre las observaciones mediante el uso de semivariogramas estimados, y ajustar el mejor modelo teórico en función del coeficiente de correlación.
2. Si la dependencia espacial existe, utilizar la metodología Kriging para realizar estimaciones del valor de la variable en localidades no medidas.
3. Por el contrario, cuando no exista dependencia espacial entre las observaciones, lo cual corresponde a que el semivariograma estimado es constante para cualquier distancia y que implicará que el coeficiente de correlación es constante, utilizar los métodos estadísticos clásicos.
4. Es recomendable utilizar a la metodología Kriging para todas aquellas variables que presenten una dependencia espacial, dado que la interpolación proporcionará valores insesgados y de varianza mínima.

5. Es posible recomendar el uso de semivariogramas para definir densidad de muestreo, dado que las distancias a las que se deberá tomar la información de las variables de interés, estará dada por el rango del semivariograma. De no existir dependencia espacial, utilizar las técnicas de muestreo clásicas.

6. Se recomienda evaluar al método Kriging mediante los errores reducidos y demostrar que éstos se distribuyen normal con media cero y varianza uno.

RESUMEN

Dentro de los métodos de estimación de valores en alguna posición dentro del espacio de exploración de la variable, el método Kriging proporciona un estimador insesgado - si, la suma de las ponderaciones por las que se multiplican las observaciones medidas es igual a uno y de varianza mínima si ésta es minimizada por un proceso de multiplicadores - de Lagrange. En el presente trabajo se demuestra lo anterior incluyendo a la estimación Cokriging y se proporciona una metodología para uso de la interpolación Kriging, consistiendo en:

a) Muestreo. Tomar información de una cuadrícula previamente realizada, para el caso de observaciones regularmente espaciadas, en este artículo se analizan profundidades de nivel freático, o tomar la información aprovechando infraestructuras ya establecidas al azar, para observaciones irregularmente espaciadas, aquí se analizan profundidades de nivel dinámico medidos en pozos de producción de agua espaciados - irregularmente.

b) Cálculo de Semivariogramas. Se calcularon los semivariogramas estimados en cada caso y se ajustaron modelos teóricos en función del coeficiente de correlación.

c) Interpolación Kriging. Dado que existió dependencia espacial entre las observaciones definidas por el semivariograma, se utilizó la metodología Kriging, para realizar estimaciones del valor de la variable en localidades no medidas.

d) Estimación del Error. Se calcularon los errores reducidos y bajo normalidad se encontró que tienen media cero y varianza uno.

Se concluye que es posible utilizar al semivariograma para definir si existe dependencia espacial entre las observaciones. Si existe, aplicar la interpolación Kriging que proporciona valores insesgados y de varianza mínima; si no existe dependencia espacial, utilizar los métodos estadísticos clásicos. Se recomienda a los semivariogramas para definir densidad de muestreo y a la interpolación Kriging para estimar valores de todas aquellas variables que presenten dependencia espacial. Así, también se recomienda evaluar a la estimación Kriging, a través de los errores reducidos.

LITERATURA CITADA

- Babalola, O. 1978. Spatial variability of soil water properties in tropical soils of Nigeria. *Soil Sci* 126(5): 269-279. United States of America.
- Biggar, J.W. and D.R. Nielsen. 1976. The spatial variability of the leaching characteristics of a field soil. - *Water Reso. Rese.* 12(10):78-84. United States of America.
- Bresler, E., S. Dasberg, D. Russo and G. Dagan. 1981. Spatial variability of crop yield as a stochastic soil process. *Soil Sci. Soc. Amer. J.* 45(5):600-605. United States of America.
- Burgess, T.M. and R. Webster. 1980a. Optimal interpolation and isarithmic mapping of soil properties. I. The semivariogram and punctual Kriging. *Soil Sci.* 31(6): 315-331. United States of America.
-
- . 1980b. Optimal interpolation and isarithmic mapping of soil properties. II. Block Kriging. *Soil Sci.* 31(7):333-341. United States of America.
- Cameron, D.R., C.G. Kowalenko and C.A. Campbell. 1979. Factors affecting nitrate nitrogen and chloride leaching variability in a field plot. *Soil Sci. Soc. Amer. J.* 43(3):455-460. United States of America.

- Campbell, J.B. 1978. Spatial variation of sand content and pH within single contiguous delineation of two soil mapping units. Soil Sci. Soc. Amer. J. 42(4):460-464. United States of America.
- Carvalho, H.O., D.K. Cassel, J. Hammond and A. Bauer. 1976. Spatial variability of in situ unsaturated hydraulic conductivity of maddock sandy loam. Soil Sci. 121(1): 1-8. United States of America.
- Cassel, D. and A. Bauer. 1975. Spatial variability in soils below depth of tillage. Bulk density and fifteen atmosphere percentage. Soil Sci. Soc. Amer. J. 39(2): 247-250. United States of America.
- Cochran, W.G. 1981. Técnicas de muestreo. CECSA. México. 513 p.
- Cortés, B:J. 1983. Determinación de las condiciones actuales de salinidad y drenaje en una área experimental localizada en el ejido Parras, municipio de Parras Coahuila. Tesis profesional. Universidad Autónoma Agraria Antonio Narro. Saltillo, México. 178 p.
- _____. 1987. Variabilidad espacial para la caracterización de problemas de salinidad y drenaje de los suelos. Resúmenes 20° Congreso Nacional de la Ciencia del Suelo. Zacatecas, Zac. México. p. 214.
- _____ y R. Morones R. 1988. La variabilidad espacial en acuíferos de calizas fisuradas. Memorias Técnicas. 2° Simposium sobre el agua subterránea en el Norte de México. Saltillo, Coahuila, México. pp. 19-25.
- Davidoff, B., J.W. Lewis and H.M. Selim. 1986. Variability of soil temperature with depth along a transect. Soil Sci. 142(2):114-123. United States of America.
- Delhomme, J.P. 1978. Kriging in the hydrosociences. Adv. Water Reso.1(5):251-266. Center D'Informatique Geologique. Fontainebleau, France.

- Dugas, W.A., G.F. Arkin and B.S. Jackson, 1983. Factors affecting simulated crop yield spatial extrapolation. Transactions ASAE. 26(5):1440-1444. United States of America.
- Gajem, Y.M., A.W. Warrick and D.E. Myers. 1981. Spatial dependence of physical properties of a typical torrifluent soil. Soil Sci. Soc. Amer. J. 45(4):709-715. United States of America.
- Hadley, G. 1969. Algebra lineal. Fondo Educativo Interamericano, S.A. 290 p.
- Hoffman, K. y R. Kunze. 1973. Algebra lineal. Ed. Prentice Hall International. 179 p.
- Hajrasuliha, S., N. Baniabbassi, J. Metthey and D.R. Nielsen. 1980. Spatial variability of soil sampling for salinity studies in southwest Iran. Irrigation Sci. 1(2):197-208. United States of America.
- Jimyeh, T.C., L.W. Gelhar and P.J. Wierenga. 1986. Observations of spatial variability of soil-water pressure in a field soil. Soil Sci. 142(1):7-12.
- Journel, A.G. and Ch.J. Huijbregts. 1978. Mining geostatistics. Academic Press. London. 207 p.
- Lanyon, L.E. and G.F. Hall. 1981. Application of autocorrelation analysis to transect data from a drainage basin in eastern Ohio. Soil Sci. Soc. Amer. J. 45(2):368-372. United States of America.
- Matheron, G. 1963. Principles of geostatistics. Econ. Gro. 58(10):1246-1266. United States of America.
- _____. 1971. The theory of regionalized variables and its application. Les cahitres du centre de morphologie mathematique. Fontainebleau, France. 79 p.

- Montgomery, E.G. 1913. Experiments in wheat breeding. Experimental error in the nursery and variation in nitrogen and yield. United States Department Agr. Bull. - plant indust. 269 p.
- Morokoc, F., J.W. Biggar, D.R. Nielsen and D.E. Myers. 1987. Kriging with generalized covariances. Soil Sci. Soc. Amer. J. 51(11):1126-1131. United States of America.
- McBratney, A.B. and R. Webster. 1983. How many observations are needed for regional estimation of soil properties?. Soil Sci. 135(3):177-183. United States of America.
- McCool, D.K. 1970. Effect of vegetal length and spatially varied flow on velocity distribution coefficients. Transactions ASAE. 13(5):603-607. United States of America.
- Nielsen, D.R., J.W. Biggar and K.T. Erh. 1973. Spatial variability of field measured soil-water properties. Hilgardia. 42(2):215-259. United States of America.
- Olea, R.A. 1974. Optimal contour mapping using universal Kriging. J. Geophysical Rese. 79(5):695-702. United States of America.
- _____. 1975. Optimum mapping techniques using regionalized variable theory. Kansas Geo. Survey. Series on spatial analysis 2. University Kansas. Lawrence, Kansas. 137 p.
- Ostle, B. 1965. Estadística aplicada. 1a. ed. LIMUSA, México. 629 p.
- Peck, A.J., R.J. Luxmoore and J.L. Stolzy. 1977. Effects of spatial variability of soil hydraulic properties in water budget modeling. Water Reso. Rese. 13(2):348-354. United States of America.

- Pendleton, R.L. 1919. Are soils mapped under a give type name by the bureau of soils method closely similar to one another? University California. Publication Agr. Sci. 3(2):369-498.
- Ramírez, A.C. 1980. Interpolación espacial de datos de sales en el suelo. Tesis Maestría. Colegio de Postgraduados. Chapingo, México. 158 p.
- Robinson, G.W., and W.E. Lloyd. 1915. On the probable error of sampling in soil surveys. J. Agr. Sci. 7(2):144-153. United States of America.
- Rodman, P.K., Ch.E. Rice and J.E. Garton. 1974. Steady state increasing spatially varied flow over a simulated vegetated surface. Transactions ASAE. 17(1):148-151. United States of America.
- Rogowski, A.S. 1972. Watershed physics. Soil variability criteria. Water Reso. Rese. 8(7):1015-1023. United States of America.
- Roman, C.J. 1980. Aplicación de la metodología Kriging universal en la elaboración de planos de nivel freático Tesis Maestría. Colegio de Postgraduados. Chapingo, México. 187 p.
- Searle, S.R. 1971. Linear models. John Wiley and Sons, Inc. United States of America.
- Sisson, J.B. and P.J. Wierenga. 1981. Spatial variability of steadystate infiltration rates as a stochastic process. Soil Sci. Soc. Amer. J. 45(4):699-704. United States of America.
- Smith, L.H. 1910. Plot arrangement for variety experiment with corn. Proc. Amer. Soc. Agron. V.I. P. 84-89. United States of America.
- Snedecor, G.W. and W.G. Cochran. 1967. Statistical methods - 65h Ed. Iowa State University. Press, Ames. 593 p.

- Vieira, S.R., J.L. Hatfield, D.R. Nielsen and J.W. Biggar. 1983. Geostatistical theory and application to variability of some agronomical properties. *Hilgardia*. 51(3):1-73.
- Vieira, S.R., D.R. Nielsen and J.W. Biggar. 1981. Spatial variability of field-measured infiltration rate. *Soil Sci. Soc. Amer. J.* 45(8):1040-1048. United States of America.
- Wagenet, R.J. and J.J. Jurinak. 1978. Spatial variability of soluble salt content in a mancos shale watershed. *Soil Sci.* 126(3):342-349. United States of America.
- Wallender, W.W. 1986. Furrow model with spatially varying infiltration. *Transactions ASAE*. 29(4):1012-1016. United States of America.
- Warrick, A.W., G.J. Mullen and D.R. Nielsen. 1977a. Scaling field measured soil hydraulic properties using a similar media concept. *Water Reso. Rese.* 13(2):355-362. United States of America.
-
- . 1977b. Predictions of the soil water flux based upon field-measured soil-water properties. *Soil Sci. Soc. Amer. J.* 41(2):14-19. United States of America.
- Waynick, D.D. 1918. Variability in soils and its significance to past and future soil investigations. I. Statistical study of nitrification in soils. University California. *Publication Agr. Sci.* 3(9):243-270. United States of America.
- Waynick, D.D. and L.T. Sharp. 1919. Variability in soils and its significance to past and future soil investigations. II. Variation in nitrogen and carbon in field soils and their relation to the accuracy of field trials. University California. *Publication Agr. Sci.* 4(5):121-139. United States of America.

- Webster, R. 1973. Automatic soil boundary location for transect data. *Math. Geo.* 5(1):27-37. United States of America.
- Webster, R. and H.E. Cuanalo. 1975. Soil transects correlograms of north Oxfordshire and their interpretation. *J. Soil Sci.* 26(2):176-194. United States of America.
- Webster R. and T.M. Burgess. 1980. Optimal interpolation and isarithmic mapping of soil properties. III. Changing drift and universal Kriging. *J. Soil Sci.* 31(4):505-524. United States of America.
- Yost, R.S. and R.L. Fox. 1981. Partitioning variation in soil chemical properties of some andepts using soil taxonomy. *Soil Sci. Soc. Amer. J.* 45(3):373-377. United States of America.

A P E N D I C E S

A P E N D I C E A

ASUNCIONES ESTACIONARIAS

ASUNCIONES ESTACIONARIAS

En un muestreo simple la función aleatoria $z(x_i)$ es una realización. Si se quiere estimar valores para las localizaciones no registradas, se puede introducir la restricción que la variable regionalizada puede ser estadísticamente homogénea e isotrópica, lo cual permite hacer inferencias estadísticas (Olea, 1975). Formalmente, una variable regionalizada es estacionaria si la estadística sobre las variables aleatorias $Z(x_i + h)$ son iguales para cualquier distancia h . Acordando al número k de momentos estadísticos que son constantes, la variable es llamada Estacionaria de orden k . Estacionaria de segundo orden es la que usualmente se requiere en geoestadística (Olea, 1975). Si se supone a la función aleatoria $z(x_i)$ que tiene valores esperados:

$$E\{Z(x_i)\} = m(x_i) \quad (\text{A.1})$$

y

$$E\{Z(x_i + h)\} = m(x_i + h) \quad (\text{A.2})$$

y varianzas

$$\text{Var}\{Z(x_i)\} \quad (\text{A.3})$$

y

$$\text{Var}\{Z(x_i + h)\} \quad (\text{A.4})$$

respectivamente para las localizaciones x_i y $x_i + h$, la

covarianza $C(x_i, x_i + h)$ entre $Z(x_i)$ y $Z(x_i + h)$ es definido por:

$$C(x_i, x_i + h) = E\{Z(x_i)Z(x_i + h)\} - \{m(x_i)m(x_i + h)\} \quad (\text{A.5})$$

y el variograma $2Y(x_i, x_i + h)$ es definido por

$$2Y(x_i, x_i + h) = E\{[Z(x_i) - Z(x_i + h)]^2\} \quad (\text{A.6})$$

La varianza de $Z(x_i)$ es:

$$\begin{aligned} \text{Var}\{Z(x_i)\} &= E\{Z(x_i)Z(x_i + 0) - m(x_i)m(x_i + 0)\} \\ &= E\{Z^2(x_i) - m^2(x_i)\} = C(x_i, x_i) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

y la varianza de $Z(x_i + h)$ es:

$$\text{Var}\{Z(x_i + h)\} = E\{Z^2(x_i + h) - m^2(x_i + h)\} = C(x_i + h, x_i + h) \quad (\text{A.8})$$

Entonces tres posibles asunciones concernientes a la estacionaridad de la función aleatoria $Z(x_i)$ pueden ser hechas, y al menos una puede ser encontrada al aplicar estimación estadística. Esas asunciones son como siguen:

1. Estacionaridad de orden dos. Una función aleatoria $Z(x_i)$ es estacionaria de orden dos (Journel y Huijbregts, 1978) cuando:

a) El valor esperado, $E\{Z(x_i)\}$ existe y no depende de la posición de x , matemáticamente:

$$E\{Z(x_i)\} = m \text{ para todo } x_i \text{ dentro del área } S \quad (\text{A.9})$$

b) Para cada par de variables aleatorias $\{Z(x_i), Z(x_i + h)\}$ la función covarianza $C(h)$, existe y depende de h .

$$C(h) = E\{Z(x_i)Z(x_i+h)\} - m^2 \quad \text{para todo } x_i \text{ dentro de } S \quad (\text{A.10})$$

En la ecuación (A.10) la estacionaridad de la covarianza implica la estacionaridad de la varianza y del variograma. De este modo, usando la linealidad del valor esperado, E, en la ecuación (A.7) resulta:

$$\begin{aligned} \text{Var}\{Z(x_i)\} &= E\{Z(x_i)Z(x_i+0)\} - E\{m^2(x_i)\} \\ &= E\{Z(x_i)Z(x_i+0)\} - m^2(x_i) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Aplicando las condiciones de estacionaridad (A.9) y (A.10) se obtiene:

$$\text{Var}\{Z(x_i)\} = E\{Z^2(x_i)\} - m^2 = C(0) \quad (\text{A.12})$$

El variograma $2Y(x_i, x_i+h)$ en ecuación (A.6) puede ser desarrollado:

$$2Y(x_i, x_i+h) = 2Y(h) = E\{Z^2(x_i) - 2Z(x_i)Z(x_i+h) + Z^2(x_i+h)\} \quad (\text{A.13})$$

Adicionando y substrayendo $2m^2$ a la ecuación (A.13)

$$2Y(h) = E\{Z^2(x_i) - m^2 - 2Z(x_i)Z(x_i+h) + 2m^2 + Z^2(x_i+h) - m^2\} \quad (\text{A.14})$$

Puesto que el valor esperado, E, es un operador lineal y el valor esperado de una constante es la misma constante, entonces:

$$2Y(h) = E\{Z^2(x_i)\} - m^2 - 2[E\{Z(x_i)Z(x_i+h)\} - m^2] + E\{Z^2(x_i+h)\} - m^2 \quad (\text{A.15})$$

Sustituyendo ecuaciones (A.10) y (A.12) en la ecuación (A.15):

$$2Y(h) = C(0) - 2C(h) + C(0) = 2C(0) - 2C(h) \quad (\text{A.16})$$

y simplificada:

$$\gamma(h) = C(0) - C(h) \quad (\text{A.17})$$

Por lo tanto, si la asunción de estacionaridad de orden dos puede ser hecha, la covarianza $C(h)$ y el variograma $2\gamma(h)$ son dos herramientas equivalentes para caracterizar la autocorrelación entre dos variables $Z(x_i)$ separadas para una distancia h . Luego, asumiendo estacionaridad, es posible repetir un experimento aún cuando las muestras sean recolectadas de diferentes puntos (Olea, 1975).

Sin embargo, la asunción de estacionaridad de orden dos implica la existencia de una varianza finita de los valores medidos, $\text{Var}\{Z(x_i)\} = C(0)$. Esta asunción no puede ser satisfecha para algunos fenómenos físicos, teniendo una capacidad infinita de dispersión.

2. Asunción intrínseca. Para evitar la existencia de restricciones de una varianza finita, requerida por la asunción de estacionaridad de orden dos, la asunción intrínseca es hecha, la cual requiere la existencia y estacionaridad del variograma solamente. Una función aleatoria $Z(x)$ es intrínseca, cuando en adición a la condición en ecuación (A.9), la diferencia $|Z(x_i) - Z(x_i + h)|$ tiene una varianza finita que no depende de x_i para toda distancia h . Esto es matemáticamente:

$$\text{Var}\{[Z(x_i) - Z(x_i + h)]\} = E\{[Z(x_i) - Z(x_i + h)]^2\} \quad (\text{A.18})$$

Sustituyendo ecuación (1):

$$\text{Var}\{[Z(x_i) - Z(x_i + h)]\} = 2\gamma(h) = E\{[Z(x_i) - Z(x_i + h)]^2\} = \sigma^2(x_0) \quad (\text{A.19})$$

En la ecuación (A.19) la cantidad $\gamma(h)$ es conocida como variograma, que se refiere al gráfico de las varianzas de las observaciones en función de la distancia h . Sin embargo, es más usada como $\gamma(h)$ que se denomina como semivariograma escrita por:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} E\{[Z(x_i) - Z(x_i+h)]^2\} \quad (A.20)$$

3. La hipótesis de Kriging Universal. Bajo esta hipótesis la función aleatoria $Z(x_i)$ para cualquier localización, x_i , consiste de dos componentes:

$$Z(x_i) = m(x_i) + \varepsilon(x_i) \quad (A.21)$$

Donde $m(x_i)$ es el valor esperado y $\varepsilon(x_i)$ el error residual. Por lo tanto, para cualquier x_i , es necesario estimar $m(x_i)$ y tener una expresión para el semivariograma de los residuales (Webster y Burgess, 1980).

Si una función aleatoria es estacionaria de orden k ($k > 0$), entonces ésta también es estacionaria para todo orden más pequeño que k . Consecuentemente, si una función aleatoria $Z(x_i)$ es estacionaria de orden dos, entonces es también intrínseca. Sin embargo, lo recíproco no necesariamente es verdad.

A P E N D I C E B

EL ESTIMADOR KRIGING ES UN ESTIMADOR
INSESGADO Y DE VARIANZA MINIMA

EL ESTIMADOR KRIGING ES UN ESTIMADOR INSESGADO
Y DE VARIANZA MINIMA

Si bien señala Cochran (1981) que en la teoría de las encuestas por muestreo es necesario considerar los estimadores sesgados por dos razones:

a) En algunos de los problemas más comunes, particularmente en la estimación por razón, se encuentra que los estimadores convenientes y apropiados son sesgados.

b) Aun con los estimadores que son insesgados en muestreo probabilista, los errores de medición y las no-respuestas pueden producir sesgos en los números que se calculan a partir de los datos.

Aquí se analizará al estimador Kriging como el mejor estimador siendo éste insesgado y con varianza mínima. Esto es matemáticamente escrito como:

$$E\{\hat{Z}(x_0) - Z(x_0)\} = 0 \quad (B.1)$$

y

$$E\{[\hat{Z}(x_0) - Z(x_0)]^2\} = \text{mínimo} \quad (B.2)$$

Los cuales son las condiciones de insesgamiento y de varianza mínima de estimación respectivamente. Sustituyendo la ecuación (11) en (B.1):

$$E\{\hat{Z}(x_0) - Z(x_0)\} = E\left[\sum_{i=1}^N \lambda_i Z(x_i) - Z(x_0)\right] = 0 \quad (\text{B.3})$$

Aplicando linealidad del operador E

$$E\{\hat{Z}(x_0) - Z(x_0)\} = \sum_{i=1}^N \lambda_i E\{Z(x_i)\} - E\{Z(x_0)\} = 0 \quad (\text{B.4})$$

Sustituyendo la ecuación (A.9) en (B.4) y factorizando:
do:

$$E\{\hat{Z}(x_0) - Z(x_0)\} = m \left[\sum_{i=1}^N \lambda_i - 1 \right] = 0 \quad (\text{B.5})$$

por lo tanto, la estimación será insesgada si:

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \quad (\text{B.6})$$

Desarrollando la ecuación (B.2)

$$E\{[\hat{Z}(x_0) - Z(x_0)]^2\} = E\{[\hat{Z}^2(x_0) + Z^2(x_0) - 2\hat{Z}(x_0)Z(x_0)]\} \quad (\text{B.7})$$

por la linealidad del operador E

$$E\{[\hat{Z}(x_0) - Z(x_0)]^2\} = E\{\hat{Z}^2(x_0)\} + E\{Z^2(x_0)\} - 2E\{\hat{Z}(x_0)Z(x_0)\} \quad (\text{B.8})$$

Desarrollando cada término del lado derecho de la ecuación (B.8) individualmente y usando ecuación (11) sucesivamente, se obtiene:

$$E\{\hat{Z}^2(x_0)\} = E\left\{\left[\sum_{i=1}^N \lambda_i Z(x_i)\right]^2\right\} = E\left\{\sum_{i=1}^N \lambda_i Z(x_i) \sum_{j=1}^N \lambda_j Z(x_j)\right\} \quad (\text{B.9})$$

$$= E\left\{\sum_i \lambda_i \sum_j \lambda_j Z(x_i) Z(x_j)\right\} = \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j E\{Z(x_i) Z(x_j)\} \quad (\text{B.10})$$

Sustituyendo la ecuación (A.10) en la ecuación (B.10)

$$E\{\hat{Z}^2(x_0)\} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i \lambda_j C(x_i, x_j) + m^2 \quad (\text{B.11})$$

Donde $C(x_i, x_j)$ se refiere a la función covarianza correspondiente a la distancia con origen en x_i y extremo en x_j .

El segundo término del lado derecho de la ecuación (B.8)

$$E\{Z^2(x_0)\} = E\{Z(x_0)Z(x_0 + 0)\} \quad (\text{B.12})$$

Sustituyendo la ecuación (A.10) en la ecuación (B.12) resulta:

$$E\{Z^2(x_0)\} = C(0) + m^2 \quad (\text{B.13})$$

El tercer término del lado derecho de la ecuación (B.8) es:

$$E\{\hat{Z}(x_0)Z(x_0)\} = E\left\{\sum_{i=1}^N \lambda_i Z(x_i)Z(x_0)\right\} = \sum_{i=1}^N \lambda_i E\{Z(x_i)Z(x_0)\} \quad (\text{B.14})$$

Sustituyendo ecuación (A.10) en la ecuación (B.14)

$$E\{\hat{Z}(x_0)Z(x_0)\} = \sum_{i=1}^N \lambda_i C(x_i, x_0) + m^2 \quad (\text{B.15})$$

Donde $C(x_i, x_0)$ se refiere a la función covarianza correspondiente al vector con origen en x_i y extremo x_0 . Sustituyendo (B.11), (B.13) y (B.15) en la ecuación (B.8) se tiene:

$$\begin{aligned} E\left\{\left[\hat{Z}(x_0) - Z(x_0)\right]^2\right\} &= \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j C(x_i, x_j) + m^2 + C(0) + m^2 \\ &\quad - 2 \sum_i \lambda_i C(x_i, x_0) - 2m^2 \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Simplificando:

$$E\{[\hat{Z}(x_0) - Z(x_0)]^2\} = \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j C(x_i, x_j) + C(0) - 2 \sum_i \lambda_i C(x_i, x_0) \quad (B.17)$$

La ecuación (B.17) será minimizada bajo la restricción que $\sum_i \lambda_i = 1$. El proceso es realizado utilizando la técnica de multiplicadores de Lagrange para satisfacer la ecuación (B.2) donde las N derivadas parciales serán:

$$\delta \{ [E\{ [\hat{Z}(x_0) - Z(x_0)]^2 \} - 2\mu \sum_i \lambda_i] / \delta \lambda_i \quad (B.18)$$

Donde μ es un multiplicador de Lagrange, resolviendo e igualando a cero la ecuación (B.18)

$$2 \sum_j \lambda_j C(x_i, x_j) - 2C(x_i, x_0) - 2\mu = 0 \quad (B.19)$$

Cancelando el factor 2 en la ecuación (B.19), reordenando y combinando con la ecuación (B.6) se tiene el Sistema Kriging

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j C(x_i, x_j) - \mu = C(x_i, x_0), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (B.20)$$

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j = 1$$

Las primeras N ecuaciones en el sistema (B.20) pueden ser reordenadas en:

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j C(x_i, x_j) = \mu + C(x_i, x_0) \quad (B.21)$$

Y sustituyendo la ecuación (B.21) en la ecuación (B.17) se tendrá la Estimación de Varianza mínima, $\sigma_k^2(x_0)$:

$$\sigma_k^2(x_0) = E\{ [\hat{Z}(x_0) - Z(x_0)]^2 \} = \sum_i \lambda_i [\mu + C(x_i, x_0)] + C(0) - 2 \sum_i \lambda_i C(x_i, x_0) \quad (B.22)$$

Reordenando y cancelando términos semejantes:

$$\sigma_k^2(x_0) = C(0) + \mu - \sum_{i=1}^N \lambda_i C(x_i, x_0) \quad (B.23)$$

El sistema Kriging (B.20) puede ser escrito en notación matricial como:

$$[C][\lambda] = [b] \quad (B.24)$$

cuya solución es de la forma:

$$[\lambda] = [C]^{-1}[b] \quad (B.25)$$

Donde $[C]$ es la matriz covarianza o la matriz Kriging en términos de covarianza, $[C]^{-1}$ es la inversa de $[C]$, $[\lambda]$ es la matriz de factores λ_i , ponderaciones no conocidas y $[b]$ es el lado derecho de la ecuación (B.20).

En notación matricial, la ecuación (B.23) es dada por:

$$\sigma_k^2(x_0) = C(0) - [\lambda]^t [b] \quad (B.26)$$

Donde $[\lambda]^t$ es la transpuesta de la matriz $[\lambda]$

Si la estacionaridad de orden dos puede ser asumida, entonces el sistema kriging (B.20) puede ser escrito en términos de sus covarianzas $C(h)$ o semivariograma $\gamma(h)$ y cambiando de una a otra usando la relación entre $\gamma(h)$ y $C(h)$ expresada en la ecuación (A.17). Hay sin embargo, una fuerte

ventaja al usar covarianza $C(h)$, la cual está relacionada a los métodos numéricos usados para obtener la solución del sistema (B.20). Si la asunción intrínseca expresada en la ecuación (A.9) y (A.18) es aplicable, es posible asumir que una alternativa es el uso de la función semivariograma $\gamma(h)$. El sistema Kriging en términos de $\gamma(h)$ es entonces fácilmente obtenido por reemplazo $C(h)$ en el sistema (B.20) por $C(0) - \gamma(h)$, es decir:

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j \hat{\gamma}(x_i, x_j) - \mu = \hat{\gamma}(x_i, x_0); \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (\text{B.27})$$

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j = 1$$

y la varianza estimada $\sigma_K^2(x_0)$.

$$\sigma_K^2(x_0) = C(0) + \mu - \sum_{i=1}^N \lambda_i \hat{\gamma}(x_i, x_0) \quad (\text{B.28})$$

A P E N D I C E C

SEMIVARIOGRAMAS, CONTRASEMIVARIOGRAMAS,
INSEGAMIENTO Y VARIANZA MÍNIMA EN LA
ESTIMACIÓN COKRIGING

SEMIVARIOGRAMAS, CONTRASEMIVARIOGRAMAS, INSEGMIENTO Y
VARIANZA MINIMA EN LA ESTIMACION COKRIGING

Asumiendo estacionaridad, el primer y segundo momentos de las funciones aleatorias $Z_1(x_i)$ y $Z_2(x_j)$ son respectivamente:

$$E\{Z_1(x_i)\} = m_1 \text{ para todo } x_i \text{ dentro del campo} \quad (\text{C.1})$$

$$E\{Z_2(x_j)\} = m_2 \text{ para todo } x_j \text{ dentro del campo} \quad (\text{C.2})$$

La covarianza de $Z_1(x_i)$ es

$$C_{11}(h) = E\{Z_1(x_i + h)Z_1(x_i)\} - m_1^2 \quad (\text{C.3})$$

La contra-covarianza entre $Z_1(x_i)$ y $Z_2(x_j)$ es:

$$C_{12}(h) = E\{Z_1(x_j + h)Z_2(x_j)\} - m_1m_2 \quad (\text{C.4})$$

La contra-covarianza entre $Z_2(x_j)$ y $Z_1(x_i)$ es:

$$C_{21}(h) = E\{Z_2(x_j + h)Z_1(x_j)\} - m_2m_1 \quad (\text{C.5})$$

La covarianza de $Z_2(x_j)$

$$C_{22}(h) = E\{Z_2(x_j + h)Z_2(x_j)\} - m_2^2 \quad (\text{C.6})$$

El semivariograma de $Z_1(x_i)$

$$\gamma_{11}(h) = \frac{1}{2} E\{[Z_1(x_i + h) - Z_1(x_i)]^2\} \quad (\text{C.7})$$

El contrasemivariograma entre $Z_1(x_i)$ y $Z_2(x_j)$, y el cual es igual a el contrasemivariograma entre $Z_2(x_j)$ y -

$Z_1(x_i)$ es:

$$\begin{aligned} \gamma_{12}(h) &= \frac{1}{2} E\{[Z_1(x_i + h) - Z_1(x_i)] [Z_2(x_j + h) - Z_2(x_j)]\} \\ &= \gamma_{21}(h) \end{aligned} \quad (C.8)$$

El semivariograma de $Z_2(x_j)$ es:

$$\gamma_{22}(h) = \frac{1}{2} E\{[Z_2(x_j + h) - Z_2(x_j)]^2\} \quad (C.9)$$

El estimador $\hat{Z}_2(x_0)$ es:

$$Z_2(x_0) = \sum_{i=1}^{N_1} \lambda_{1i} Z_1(x_i) + \sum_{j=1}^{N_2} \lambda_{2j} Z_2(x_j) \quad (C.10)$$

Donde N_1 y N_2 son los números de los puntos vecinos de Z_1 y Z_2 respectivamente, usado en la estimación de un valor Cokrigado, $\hat{Z}_2(x_0)$. La condición de insesgado es:

$$E\{\hat{Z}_2(x_0) - Z_2(x_0)\} = 0 \quad (C.11)$$

y la condición de varianza mínima es:

$$\sigma_e^2(x_0) = E\{[\hat{Z}_2(x_0) - Z_2(x_0)]^2\} = \text{mínimo} \quad (C.12)$$

Sustituyendo la ecuación (C.10) en la ecuación (C.11)

da:

$$E\{\hat{Z}_2(x_0) - Z_2(x_0)\} = E\left\{\sum_{i=1}^{N_1} \lambda_{1i} Z_1(x_i) + \sum_{j=1}^{N_2} \lambda_{2j} Z_2(x_j) - Z_2(x_0)\right\} = 0 \quad (C.13)$$

Usando linealidad del operador E

$$\begin{aligned} E\{\hat{Z}_2(x_0) - Z_2(x_0)\} &= \sum_{i=1}^{N_1} \lambda_{1i} E\{Z_1(x_i)\} + \sum_{j=1}^{N_2} \lambda_{2j} E\{Z_2(x_j)\} - \\ &\quad - E\{Z_2(x_0)\} = 0 \end{aligned} \quad (C.14)$$

Sustituyendo (C.1) y (C.2) en (C.14)

$$m_1 \sum_{i=1}^{N_1} \lambda_{1i} + m_2 \sum_{j=1}^{N_2} \lambda_{2j} - m_2 = 0 \quad (\text{C.15})$$

factorizando m_2 resulta:

$$m_1 \sum_{i=1}^{N_1} \lambda_{1i} + m_2 \left[\sum_{j=1}^{N_2} \lambda_{2j} - 1 \right] = 0 \quad (\text{C.16})$$

Por lo tanto, el estimador $\hat{Z}_2(x_0)$ será insesgado si:

$$\sum_{j=1}^{N_2} \lambda_{2j} = 1 \quad (\text{C.17})$$

y

$$\sum_{i=1}^{N_1} \lambda_{1i} = 0 \quad (\text{C.18})$$

Ahora, desarrollando el cuadrado en la ecuación (C.12)

$$\begin{aligned} E\{ [\hat{Z}_2(x_0) - Z_2(x_0)]^2 \} &= E\{ \hat{Z}_2^2(x_0) + Z_2^2(x_0) - \hat{Z}_2(x_0)Z_2(x_0) - \\ &\quad - Z_2(x_0)\hat{Z}_2(x_0) \} \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

Aplicando linealidad del operador E

$$\begin{aligned} E\{ [\hat{Z}_2(x_0) - Z_2(x_0)]^2 \} &= E\{ \hat{Z}_2^2(x_0) \} + E\{ Z_2^2(x_0) \} - E\{ \hat{Z}_2(x_0)Z_2(x_0) \} - \\ &\quad - E\{ Z_2(x_0)\hat{Z}_2(x_0) \} \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

Desarrollando cada término del lado derecho de la ecuación (C.20) y sustituyendo ecuación (C.10) en el primer término, resulta en:

$$\begin{aligned} E\{ \hat{Z}_2^2(x_0) \} &= E\{ \hat{Z}_2(x_0)\hat{Z}_2(x_0) \} = E\{ \left[\sum_i \lambda_{1i}Z_1(x_i) + \sum_j \lambda_{2j}Z_2(x_j) \right] \\ &\quad \left[\sum_k \lambda_{1k}Z_1(x_k) + \sum_\ell \lambda_{2\ell}Z_2(x_\ell) \right] \} \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

Expandiendo dentro de los paréntesis del lado derecho:

$$\begin{aligned}
 E\{\hat{Z}_2^2(x_0)\} = & E\left\{\sum_i \lambda_{1i} Z_1(x_i) \sum_k \lambda_{1k} Z_1(x_k) + \sum_i \lambda_{1i} Z_1(x_i) \sum_\ell \lambda_{2\ell} Z_2(x_\ell) + \right. \\
 & \left. + \sum_j \lambda_{2j} Z_2(x_j) \sum_k \lambda_{1k} Z_1(x_k) + \sum_j \lambda_{2j} Z_2(x_j) \sum_\ell \lambda_{2\ell} Z_2(x_\ell) \right\}
 \end{aligned} \tag{C.22}$$

Reordenando las sumatorias y usando linealidad del operador E:

$$\begin{aligned}
 E\{\hat{Z}_2^2(x_0)\} = & \sum_i \sum_k \lambda_{1i} \lambda_{1k} E\{Z_1(x_i) Z_1(x_k)\} + \sum_i \sum_\ell \lambda_{1i} \lambda_{2\ell} E\{Z_1(x_i) Z_2(x_\ell)\} \\
 & + \sum_j \sum_k \lambda_{2j} \lambda_{1k} E\{Z_2(x_j) Z_1(x_k)\} + \sum_j \sum_\ell \lambda_{2j} \lambda_{2\ell} E\{Z_2(x_j) Z_2(x_\ell)\}
 \end{aligned} \tag{C.23}$$

Sustituyendo ecuaciones (C.3), (C.4), (C.5) y (C.6) en (C.23) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 E\{\hat{Z}_2^2(x_0)\} = & \sum_i \sum_k \lambda_{1i} \lambda_{1k} [C_{11}(x_{1i}, x_{1k}) + m_1^2] + \sum_i \sum_\ell \lambda_{1i} \lambda_{2\ell} [C_{12}(x_{1i}, x_{2\ell}) + \\
 & + m_1 m_2] + \sum_j \sum_k \lambda_{2j} \lambda_{1k} [C_{21}(x_{2j}, x_{1k}) + m_2 m_1] + \\
 & \sum_j \sum_\ell \lambda_{2j} \lambda_{2\ell} [C_{22}(x_{2j}, x_{2\ell}) + m_2^2]
 \end{aligned} \tag{C.24}$$

Multiplicando dentro de los paréntesis:

$$\begin{aligned}
 E\{\hat{Z}_2^2(x_0)\} = & \sum_i \sum_k \lambda_{1i} \lambda_{1k} C_{11}(x_{1i}, x_{1k}) + m_1^2 \sum_i \sum_k \lambda_{1i} \lambda_{1k} + \\
 & + \sum_i \sum_\ell \lambda_{1i} \lambda_{2\ell} C_{12}(x_{1i}, x_{2\ell}) + m_1 m_2 \sum_i \sum_\ell \lambda_{1i} \lambda_{2\ell} + \\
 & + \sum_j \sum_k \lambda_{2j} \lambda_{1k} C_{21}(x_{2j}, x_{1k}) + m_2 m_1 \sum_j \sum_k \lambda_{2j} \lambda_{1k} + \\
 & + \sum_j \sum_\ell \lambda_{2j} \lambda_{2\ell} C_{22}(x_{2j}, x_{2\ell}) + m_2^2 \sum_j \sum_\ell \lambda_{2j} \lambda_{2\ell}
 \end{aligned} \tag{C.25}$$

Sustituyendo ecuaciones (C.17) y (C.18) en (C.25)

$$\begin{aligned}
 E\{\hat{Z}_2^2(x_0)\} &= \sum_i \sum_k \lambda_{1i} \lambda_{1k} C_{11}(x_{1i}, x_{1k}) + \sum_i \sum_\ell \lambda_{1i} \lambda_{2\ell} C_{12}(x_{1i}, x_{2\ell}) + \\
 &+ \sum_j \sum_k \lambda_{2j} \lambda_{1k} C_{21}(x_{2j}, x_{1k}) + \sum_j \sum_\ell \lambda_{2j} \lambda_{2\ell} C_{22}(x_{2j}, x_{2\ell}) + m_2^2
 \end{aligned} \tag{C.26}$$

El segundo término del lado derecho de la ecuación (C.20) puede ser nuevamente expresado como:

$$E\{Z_2^2(x_0)\} = E\{Z_2(x_0)Z_2(x_0)\} = E\{Z_2(x_0+0)Z_2(x_0)\} \tag{C.27}$$

Sustituyendo la ecuación (C.6) en (C.27) para $h = 0$

$$E\{Z_2^2(x_0)\} = C_{22}(0) + m_2^2 \tag{C.28}$$

Sustituyendo la ecuación (C.10) para el tercer término del lado derecho de la ecuación (C.20) resulta en:

$$E\{\hat{Z}_2(x_0)Z_2(x_0)\} = E\left\{\left[\sum_k \lambda_{1k} Z_1(x_k) + \sum_\ell \lambda_{2\ell} Z_2(x_\ell)\right] Z_2(x_0)\right\} \tag{C.29}$$

Multiplicando dentro del paréntesis y usando linealidad del operador E

$$E\{\hat{Z}_2(x_0)Z_2(x_0)\} = \sum_k \lambda_{1k} E\{Z_1(x_k)Z_2(x_0)\} + \sum_\ell \lambda_{2\ell} E\{Z_2(x_\ell)Z_2(x_0)\} \tag{C.30}$$

Sustituyendo las ecuaciones (C.4) y (C.6) en (C.30)

$$\begin{aligned}
 E\{\hat{Z}_2(x_0)Z_2(x_0)\} &= \sum_k \lambda_{1k} [C_{12}(x_{1k}, x_0) + m_1 m_2] + \\
 &+ \sum_\ell \lambda_{1\ell} [C_{22}(x_{2\ell}, x_0) + m_2^2]
 \end{aligned} \tag{C.31}$$

Multiplicando dentro de los paréntesis:

$$E\{\hat{Z}_2(x_0)Z_2(x_0)\} = \sum_k \lambda_{1k} C_{12}(x_{1k}, x_0) + m_1 m_2 \sum_k \lambda_{1k} + \\ + \sum_\ell \lambda_{2\ell} C_{22}(x_{2\ell}, x_0) + m_2^2 \sum_\ell \lambda_{2\ell} \quad (C.32)$$

Aplicando condiciones (C.17) y (C.18) a los términos constantes de la ecuación (C.32):

$$E\{\hat{Z}_2(x_0)Z_2(x_0)\} = \sum_k \lambda_{1k} C_{12}(x_{1k}, x_0) + \sum_\ell \lambda_{2\ell} C_{22}(x_{2\ell}, x_0) + m_2^2 \quad (C.33)$$

Sustituyendo ecuación (C.10) para el cuarto término del lado derecho de la ecuación (C.20)

$$E\{Z_2(x_0)\hat{Z}_2(x_0)\} = E\{Z_2(x_0) \left[\sum_k \lambda_{1k} Z_1(x_k) + \sum_\ell \lambda_{2\ell} Z_2(x_\ell) \right]\} \quad (C.34)$$

Multiplicando dentro del paréntesis y usando linealidad del operador E:

$$E\{Z_2(x_0)\hat{Z}_2(x_0)\} = \sum_k \lambda_{1k} E\{Z_2(x_0)Z_1(x_k)\} + \sum_\ell \lambda_{2\ell} E\{Z_2(x_0)Z_2(x_\ell)\} \quad (C.35)$$

Sustituyendo ecuaciones (C.5) y (C.6) en (C.35)

$$E\{Z_2(x_0)\hat{Z}_2(x_0)\} = \sum_k \lambda_{1k} [C_{21}(x_0, x_{1k}) + m_2 m_1] + \sum_\ell \lambda_{2\ell} [C_{22}(x_0, x_{2\ell}) + m_2^2] \quad (C.36)$$

Multiplicando dentro de los paréntesis:

$$E\{Z_2(x_0)\hat{Z}_2(x_0)\} = \sum_k \lambda_{1k} C_{21}(x_0, x_{1k}) + m_2 m_1 \sum_k \lambda_{1k} + \\ + \sum_\ell \lambda_{2\ell} C_{22}(x_0, x_{2\ell}) + m_2^2 \sum_\ell \lambda_{2\ell} \quad (C.37)$$

Aplicando condiciones (C.17) y (C.18) a los términos constantes de la ecuación (C.37)

$$E\{Z_2(x_0)\hat{Z}_2(x_0)\} = \sum_k \lambda_{1k}C_{21}(x_0, x_{1k}) + \sum_\ell \lambda_{2\ell}C_{22}(x_0, x_{2\ell}) + m_2^2 \quad (C.38)$$

Sustituyendo ecuaciones (C.26), (C.28), (C.33) y (C.38) en (C.20)

$$\begin{aligned} \sigma_E^2(x_0) = E\{[\hat{Z}_2(x_0) - Z_2(x_0)]^2\} &= \sum_i \sum_k \lambda_{1i}\lambda_{1k}C_{11}(x_{1i}, x_{1k}) + \\ &\sum_i \sum_\ell \lambda_{1i}\lambda_{2\ell}C_{12}(x_{1i}, x_{2\ell}) + \sum_j \sum_k \lambda_{2j}\lambda_{1k}C_{21}(x_{2j}, x_{1k}) + \\ &\sum_j \sum_\ell \lambda_{2j}\lambda_{2\ell}C_{22}(x_{2j}, x_{2\ell}) + m_2^2 + C_{22}(0) + m_2^2 - \\ &\sum_k \lambda_{1k}C_{12}(x_{1k}, x_0) - \sum_\ell \lambda_{2\ell}C_{22}(x_{2\ell}, x_0) - m_2^2 - \\ &\sum_k \lambda_{1k}C_{21}(x_0, x_{1k}) - \sum_\ell \lambda_{2\ell}C_{22}(x_0, x_{2\ell}) - m_2^2 \end{aligned} \quad (C.39)$$

Cancelando m_2^2 y renombrando dado que:

$C(h) = C(-h)$ y $C_{k'k}(h) = C_{kk'}(-h)$ la ecuación (C.39) puede ser escrita como:

$$\begin{aligned} \sigma_E^2(x_0) &= \sum_i \sum_k \lambda_{1i}\lambda_{1k}C_{11}(x_{1i}, x_{1k}) + \sum_i \sum_\ell \lambda_{1i}\lambda_{2\ell}C_{12}(x_{1i}, x_{2\ell}) + \\ &\sum_j \sum_k \lambda_{2j}\lambda_{1k}C_{21}(x_{2j}, x_{1k}) + \sum_j \sum_\ell \lambda_{2j}\lambda_{2\ell}C_{22}(x_{2j}, x_{2\ell}) - \\ &2\sum_k \lambda_{1k}C_{12}(x_{1k}, x_0) - 2\sum_\ell \lambda_{2\ell}C_{22}(x_{2\ell}, x_0) + C_{22}(0) \end{aligned} \quad (C.40)$$

La minimización de la varianza estimada (C.40) puede ser realizada por la aplicación de técnicas de multiplicador de Lagrange, con:

$$\delta [\sigma_E^2(x_0) - 2\mu_2 \sum_{\ell} \lambda_{2\ell}] / \delta \lambda_{2\ell} = 0 \quad (C.41)$$

y

$$\delta [\sigma_E^2(x_0) - 2\mu_1 \sum_k \lambda_{1k}] / \delta \lambda_{1k} = 0 \quad (C.42)$$

Donde μ_1 y μ_2 son multiplicadores de Lagrange. La ecuación (C.41) produce:

$$2 \sum_i \lambda_{1i} C_{11}(x_{1i}, x_{1k}) + \sum_{\ell} \lambda_{2\ell} C_{12}(x_{1i}, x_{2\ell}) + \sum_j \lambda_{2j} C_{21}(x_{2j}, x_{1k}) - 2C_{12}(x_{1k}, x_0) - 2\mu_1 = 0 \quad (C.43)$$

Renombrando el factor tal que $C_{k'k}(h) = C_{kk}(-h)$ y ℓ es un índice dummy, es posible reescribir (C.43) como:

$$2 \sum_i \lambda_{1i} C_{11}(x_{1i}, x_{1k}) + 2 \sum_j \lambda_{2j} C_{12}(x_{1k}, x_{2j}) - 2C_{12}(x_{1k}, x_0) - 2\mu_1 = 0 \quad (C.44)$$

Cancelando y ordenando:

$$\sum_i \lambda_{1i} C_{11}(x_{1i}, x_{1k}) + \sum_j \lambda_{2j} C_{12}(x_{1k}, x_{2j}) - \mu_1 = C_{12}(x_{1k}, x_0) \quad (C.45)$$

La ecuación (C.42) produce:

$$\sum_i \lambda_{1i} C_{12}(x_{1i}, x_{2\ell}) + \sum_k \lambda_{1k} C_{21}(x_{2j}, x_{1k}) + 2 \sum_j \lambda_{2j} C_{22}(x_{2j}, x_{2\ell}) - 2C_{22}(x_{2\ell}, x_0) - 2\mu_2 = 0 \quad (C.46)$$

0

$$\sum_i \lambda_{1i} C_{12}(x_{1i}, x_{2\ell}) + \sum_j \lambda_{2j} C_{22}(x_{2j}, x_{2\ell}) - \mu_2 = C_{22}(x_{2\ell}, x_0) \quad (C.47)$$

Combinando ecuaciones (C.17), (C.18), (C.45) y (C.47) se produce el sistema Cokriging.

$$\sum_{i=1}^{N_1} \lambda_{1i} C_{11}(x_{1i}, x_{1k}) + \sum_{j=1}^{N_2} \lambda_{2j} C_{12}(x_{1k}, x_{2j}) - \mu_1 = C_{12}(x_{1k}, x_0)$$

$$k = 1, 2, \dots, N_1$$

$$\sum_{i=1}^{N_1} \lambda_{1i} C_{12}(x_{1i}, x_{2\ell}) + \sum_{j=1}^{N_2} \lambda_{2j} C_{22}(x_{2j}, x_{2\ell}) - \mu_2 = C_{22}(x_{2\ell}, x_0)$$

$$\ell = 1, 2, \dots, N_2$$

$$\sum_{i=1}^{N_1} \lambda_{1i} = 0$$

(C.48)

$$\sum_{j=1}^{N_2} \lambda_{2j} = 1$$

Reordenando el primer y segundo término del sistema de ecuaciones (C.48) y sustituyendo ellos en la ecuación (C.40) produce la estimación de la varianza del cokriging $\sigma_{k_2}^2(x_0)$

$$\sigma_{k_2}^2(x_0) = C_{22}(0) + \mu_2 - \sum_{i=1}^{N_1} \lambda_{1i} C_{12}(x_{1i}, x_0) - \sum_{j=1}^{N_2} \lambda_{2j} C_{22}(x_{2j}, x_0) \quad (C.49)$$

La solución del sistema (C.48) producirá N_1 ponderaciones λ_{1i} , N_2 ponderaciones λ_{2j} , y los μ_1 y μ_2 multiplicadores de Lagrange.

El sistema cokriging puede ser escrito en notación matricial si se supone que $N_2 = 2$ y $N_1 = 4$. Entonces, la matriz $[C]$ será una matriz 8×8 y puede ser explícitamente escrita como:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11}(x_{11}, x_{11}) & C_{11}(x_{12}, x_{11}) & C_{11}(x_{13}, x_{11}) & C_{11}(x_{14}, x_{11}) & C_{12}(x_{11}, x_{21}) & C_{12}(x_{11}, x_{22}) & 1 & 0 \\ C_{11}(x_{11}, x_{12}) & C_{11}(x_{12}, x_{12}) & C_{11}(x_{13}, x_{12}) & C_{11}(x_{14}, x_{12}) & C_{12}(x_{12}, x_{21}) & C_{12}(x_{12}, x_{22}) & 1 & 0 \\ C_{11}(x_{11}, x_{13}) & C_{11}(x_{12}, x_{13}) & C_{11}(x_{13}, x_{13}) & C_{11}(x_{14}, x_{13}) & C_{12}(x_{13}, x_{21}) & C_{12}(x_{13}, x_{22}) & 1 & 0 \\ C_{11}(x_{11}, x_{14}) & C_{11}(x_{12}, x_{14}) & C_{11}(x_{13}, x_{14}) & C_{11}(x_{14}, x_{14}) & C_{12}(x_{14}, x_{21}) & C_{12}(x_{14}, x_{22}) & 1 & 0 \\ C_{12}(x_{11}, x_{21}) & C_{12}(x_{12}, x_{21}) & C_{12}(x_{13}, x_{21}) & C_{12}(x_{14}, x_{21}) & C_{22}(x_{21}, x_{21}) & C_{22}(x_{21}, x_{22}) & 0 & 1 \\ C_{12}(x_{11}, x_{22}) & C_{12}(x_{12}, x_{22}) & C_{12}(x_{13}, x_{22}) & C_{12}(x_{14}, x_{22}) & C_{22}(x_{22}, x_{21}) & C_{22}(x_{22}, x_{22}) & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de $[\lambda]$ de parámetros desconocidos puede ser escrita como:

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{12} \\ \lambda_{13} \\ \lambda_{14} \\ \lambda_{21} \\ \lambda_{22} \\ -\mu_1 \\ -\mu_2 \end{bmatrix}$$

Y el lado derecho $[b]$ puede ser escrito como:

$$[b] = \begin{bmatrix} C_{12}(x_{11}, x_0) \\ C_{12}(x_{12}, x_0) \\ C_{12}(x_{13}, x_0) \\ C_{12}(x_{14}, x_0) \\ C_{22}(x_{21}, x_0) \\ C_{22}(x_{22}, x_0) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$