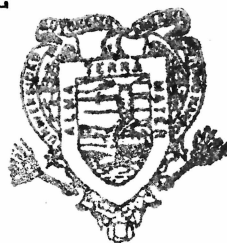


LIMITES Y NORMAS DE PARO EN CONTROL  
ESTADISTICO DE CALIDAD

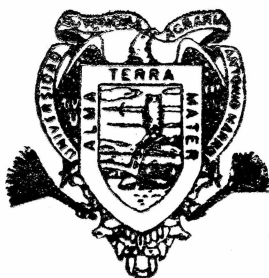
JUAN MANUEL SAUCEDO ESQUIVEL

T E S I S

PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL  
PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS  
EN ESTADISTICA EXPERIMENTAL



BIBLIOTECA  
EGIDIO G. REBONATO  
BANCO DE TESIS  
U.A.A.A.N.



Universidad Autónoma Agraria  
Antonio Narro

PROGRAMA DE GRADUADOS

Buenavista, Saltillo, Coah.

MARZO DE 1999

UNIVERSIDAD AUTONOMA AGRARIA  
ANTONIO NARRO

SUBDIRECCION DE POSTGRADO

LIMITES Y NORMAS DE PARO EN CONTROL ESTADISTICO DE CALIDAD

TESIS

POR

JUAN MANUEL SAUCEDO ESQUIVEL

ELABORADA BAJO LA SUPERVISION DEL COMITE PARTICULAR DE  
ASESORIA Y APROBADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OPTAR AL  
GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS  
EN ESTADISTICA EXPERIMENTAL

COMITE PARTICULAR

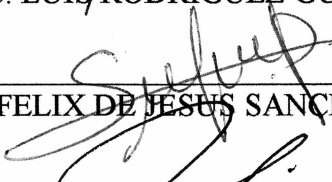
ASESOR PRINCIPAL:

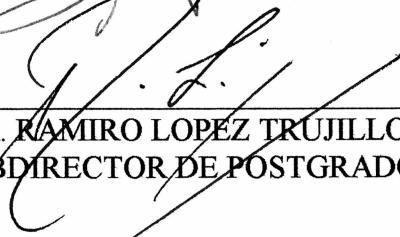
  
\_\_\_\_\_  
DR. ROLANDO CAVAZOS CADENA

VOCAL:

  
\_\_\_\_\_  
M.C. LUIS RODRIGUEZ GUTIERREZ

VOCAL:

  
\_\_\_\_\_  
M.C. FELIX DE JESUS SANCHEZ PEREZ

  
\_\_\_\_\_  
DR. RAMIRO LOPEZ TRUJILLO  
SUBDIRECTOR DE POSTGRADO

BUENAVISTA, SALTILLO, COAHUILA, MARZO DE 1999



BIBLIOTECA  
EGIDIO G. REBONATO  
BANCO DE TESIS  
U.A.A.A.N.

## AGRADECIMIENTOS

Agradezco enormemente al DR. Rolando Cavazos Cadena por la oportunidad de compartir una etapa de experiencias académicas durante mis estudios, por la gran ayuda que me brindó en el desarrollo del presente trabajo, además a los valiosos consejos, que sin duda me enriquecerán tanto para mi desarrollo profesional como personal.

## DEDICATORIA

A mi esposa y compañera,

Alma.

Al motivo de mis esfuerzos, mi hijo

Sebastian.

A mi madre,

Bertha.

# COMPENDIO

Límites y Normas de Paro en Control Estadístico de Calidad

POR

JUAN MANUEL SAUCEDO ESQUIVEL

MAESTRIA

ESTADISTICA EXPERIMENTAL

UNIVERSIDAD AUTONOMA AGRARIA ANTONIO NARRO

BUENAVISTA, SALTILLO, COAHUILA. MARZO DE 1999

Dr. Rolando Cavazos Cadena - Asesor -

**Palabras clave :** Gráfico de control, distribución unimodal, límites de control, cota no paramétrica, estimación óptima de límites de control, normas de paro, longitud promedio de corridas.

Este trabajo se enfoca en analizar estadísticamente a los límites de control, como elementos primordiales en la construcción de gráficos de control de calidad, además se analizan ciertas normas de paro derivadas de dichos gráficos como procedimientos de gran utilidad en la toma de decisiones, dentro del Control Estadístico de Calidad. El objetivo que se persigue es mostrar algunos aspectos técnicos referentes tanto a la construcción como interpretación de gráficos de control.

# ABSTRACT

Limits and Stopping Rules in Statistical Quality Control

BY

JUAN MANUEL SAUCEDO-ESQUIVEL

MASTER OF SCIENCE

EXPERIMENTAL STATISTICS

UNIVERSIDAD AUTONOMA AGRARIA ANTONIO NARRO

BUENAVISTA, SALTILLO, COAHUILA. MARCH 1999

Dr. Rolando Cavazos-Cadena - Advisor -

**Keywords :** control charts, unimodal distribution, control limits, nonparametric indicator, optimal estimation of control limits, stopping rules, average run lengths.

This work concerns control limits, these elements are considered essential in the construction of quality control charts. We also analyze some stopping rules connected from those charts, which are considered as important procedures in final decisions related with Statistical Quality Control. The principal purpose in this work is to show those technical features are focused in both; construction and interpreting control charts.

# ÍNDICE DE CONTENIDO

	Página
Presentación . . . . .	1
Introducción . . . . .	1
Objetivos . . . . .	3
La Organización del Trabajo . . . . .	4
La Idea Fundamental . . . . .	7
Introducción . . . . .	7
Construcción de un Gráfico de Control . . . . .	10
Elección de los Límites de Control . . . . .	13
Ejemplos . . . . .	22
Probabilidad de un Punto Fuera de Control . . . . .	27
Inferencia Estadística y Gráficos de Control . . . . .	33
Caracterización Alternativa de los Límites de Control . . . . .	36
Conclusión . . . . .	40
Gráficos de Control en las Aplicaciones . . . . .	41
Introducción . . . . .	41
Límites de Control para la Media . . . . .	42
Estimación Óptima de los Límites de Control . . . . .	44
Probabilidad de un Punto Fuera de Control . . . . .	48
Estimación Clásica de los Límites de Control . . . . .	53
Control de la Desviación Estandar . . . . .	58
Las Especificaciones y la Capacidad de Proceso . . . . .	61
Conclusión . . . . .	62
Reglas de Paro y Longitud Promedio de Corridas . . . . .	64
Introducción . . . . .	64
El Índice de Funcionamiento . . . . .	66
LPC Para la Primera Regla de Paro . . . . .	71
La Segunda Regla de Paro . . . . .	76
Una Regla de Paro Combinada . . . . .	80
La Regla $RP_{1-m}$ . . . . .	82
Conclusión . . . . .	89
Enfoque Matricial . . . . .	90
Introducción . . . . .	90
Análisis Algebraico . . . . .	91
La Regla de Paro $RP_{1-m}$ desde otra Perspectiva . . . . .	95

Una Regla de Paro Unilateral . . . . .	97
Una Norma Combinada General . . . . .	101
Conclusión . . . . .	104
Epílogo . . . . .	105
Literatura Citada . . . . .	107
Apéndice . . . . .	109
Apéndice A . . . . .	110



# PRESENTACIÓN

En este capítulo se presenta una visión general de los problemas que se considerarán en el desarrollo del presente trabajo. Además de introducir la terminología necesaria, y de ubicar a los así llamados gráficos control como un instrumento poderoso en el aseguramiento de calidad, la idea es proporcionar un panorama general de los objetivos que se persiguen y de la estrategia que se seguirá para alcanzarlos.

## Introducción

Este trabajo trata sobre un problema de importancia capital en un proceso productivo, a saber, asegurar la *calidad* de los artículos fabricados. En términos generales, la idea de calidad de un artículo se refiere a las características que lo llevan a satisfacer los requisitos que los consumidores imponen, y por lo tanto está íntimamente relacionada con la *aptitud de los productos para el uso potencial que tendrán* (John, 1990; Duncan 1989).

El panorama genérico que se observa al considerar un proceso de fabricación repetitivo, tiene dos facetas: El cliente o consumidor impone una serie de especificaciones, y el fabricante implementa un proceso productivo de acuerdo a las exigencias que enfrenta, tratando que la 'gran mayoría' de los artículos que salen de la línea de producción satisfagan los requerimientos establecidos, pues de otra manera serán rechazados en el mercado. Así, detrás de un proceso de producción, se encuentra un intenso trabajo de planeación y diseño, en el cual los factores más importantes para determinar las características del producto se identifican y controlan: los proveedores se seleccionan y se discrimina entre diversos insumos po-

tenciales, las máquinas se ajustan, los operarios se entrenan, y en suma, se toman 'todas' las medidas posibles para propiciar que los artículos producidos tengan los rasgos requeridos.

Después de la fase de diseño el proceso se implementa. Sin embargo, no importa que tanto empeño se ponga en controlar o identificar factores relevantes, siempre existen otros que no se pueden controlar, y que fluctúan de forma aleatoria, más aún, es posible que los factores supuestamente controlados, como las características de los insumos, o el desempeño de los operarios también sufran alteraciones impredecibles; considere, por ejemplo, los cambios en el estado de ánimo, o el cansancio del personal, que inciden sobre los rasgos de los artículos finales. Esta observación pretende poner de relieve el siguiente hecho: Las características esenciales del producto, las cuales determinan su aptitud para el uso que le dará el consumidor, están sujetas a fluctuaciones aleatorias. Por lo tanto, a lo más que se puede aspirar, es a que el valor promedio (esperado) de las características de interés permanezcan constantes, pero no a que los valores observados en de esos rasgos sean los mismos en todos los productos. De hecho, el proceso productivo se diseña para que, tomando en cuenta la variabilidad 'natural' de las características de interés, éstas se ubiquen, con una alta probabilidad, dentro de los límites impuestos por las especificaciones señaladas por el consumidor.

En este trabajo se supone que el fabricante ha centrado su atención en un rasgo relevante de los artículos que produce, y está interesado en mantener constante su valor esperado durante el proceso de producción. Su interés por mantener inalterado este parámetro, radica en que es un medio de asegurar que las especificaciones impuestas se cumplirán, al menos dentro de los límites de frecuencia que el diseño del proceso estipula. *Cuando el valor esperado de la característica de interés no altera su valor original, se dice que el proceso de producción se encuentra bajo control estadístico, o que el proceso se encuentra en estado estable, mientras que si dicho valor esperado se altera, el proceso se encuentra fuera de*

*control*. El objetivo del fabricante—o del ingeniero de control—es mantener el proceso bajo control (estadístico), y detectar los cambios en el valor esperado del rasgo de interés, antes de que se produzcan un gran número de artículos, pues éstos no llenarán, en su gran mayoría, los requerimientos estipulados. Cuando dicho cambio sea percibido, se buscarán las causas que dieron origen a ese cambio, y se corregirán para volver al estado de control estadístico. Es en este punto donde entran en juego *los gráficos de control*, los cuales constituyen el objeto de estudio de esta trabajo; dichos gráficos son un instrumento ampliamente utilizado para decidir si el proceso productivo se desarrolla de manera estable, esto es, está bajo control y en el estudio que se realiza en los siguientes capítulos se abordan temas relacionados, tanto con el aspecto teórico detrás de esta herramienta, como con su implementación en las aplicaciones.

## Objetivos

Como ya se ha mencionado, este trabajo gira alrededor de las ideas estadísticas que se relacionan con la aplicación de los gráficos de control en procesos productivos. En términos generales, uno de tales gráficos se traza sobre un plano en el que se distinguen, al menos, dos regiones denotadas por  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{R}$  y denominadas zonas de aceptación y rechazo, respectivamente. Conforme se producen artículos, se extraen algunos de ellos, se inspeccionan y se obtienen datos que, de alguna forma, se marcan sobre el gráfico. Las regiones se construyen de tal manera que cuando una marca cae dentro de la región de rechazo, se ordena revisar el proceso productivo, pues se sospecha que las características iniciales de los artículos se han alterado, esto es, que el proceso ya no se desarrolla bajo condiciones ‘estables’. Por otro lado, si una marca se ubica dentro de  $\mathcal{A}$  el proceso productivo continúa normalmente.

Los objetivos que el presente trabajo pretende alcanzar son los siguientes:

- *Caracterizar* la zona de aceptación de un gráfico optimizando su amplitud.
- *Distinguir* la zona de aceptación que minimiza la probabilidad de rechazar el supuesto de que el proceso se encuentra bajo control estadístico.
- *Determinar* cotas no paramétricas para la probabilidad de rechazar incorrectamente la hipótesis de que el proceso productivo opera en condiciones de estabilidad.

Estos tres objetivos se relacionan con los aspectos más básicos en la construcción de un gráfico. Por otro lado, también se tiene en mente la *aplicación* real de los gráficos de control, y en esta dirección los propósitos que se persiguen son los siguientes.

- *Valorar* el efecto que, sobre la probabilidad de rechazar el supuesto de estabilidad del proceso, tiene el empleo de estimaciones de las características iniciales de los productos.
- *Determinar*, para una regla general de decisión derivada del gráfico, una fórmula para el número esperado de inspecciones que se efectúan *antes* de que se detecte una alteración en los rasgos esenciales de los productos.

## **La Organización del Trabajo**

Para alcanzar los propósitos que se han planteado en este trabajo, el material subsecuente ha sido organizado de la siguiente manera:

En el Capítulo 2 se introducen formalmente las nociones de gráfico y límites de control, y se relaciona la aplicación de un gráfico con los métodos clásicos de inferencia, a saber, la construcción de intervalos de confianza y de prueba de hipótesis. Posteriormente, bajo el supuesto de unimodalidad de las medias muestrales asociadas a los datos obtenidos en las inspecciones sucesivas, se caracterizan los límites de control que producen la amplitud mínima de la zona de aceptación,

y se considera el problema de minimizar la probabilidad de rechazar incorrectamente la hipótesis de estabilidad del proceso, distinguiendo los límites de control que resuelven este problema de optimización. El capítulo concluye estableciendo una generalización de la desigualdad de Camp–Meidel, la cual permite establecer cotas *no paramétricas* para la probabilidad de un rechazo incorrecto del supuesto de estabilidad del proceso. De esta forma, al finalizar el Capítulo 2 se habrán alcanzado los primeros tres objetivos planteados.

Por otro lado, en Capítulo 3 se inicia la discusión de los aspectos prácticos de la implementación de un gráfico de control. Primero, se aborda el problema de estimación óptima de los límites de control por medio de muestras piloto, considerando tanto el método de rangos como el de la desviación estándar para estimar la variabilidad del rasgo de interés. A continuación se considera el efecto que la estimación de parámetros tiene sobre la probabilidad de declarar que el proceso debe revisarse, y se establece el resultado principal en el Teorema 3.4.1, alcanzando el cuarto de los objetivos propuestos. Finalmente, se relaciona la idea de control o estabilidad de un proceso productivo con las especificaciones requeridas por el consumidor.

En el Capítulo 4 se introduce la noción de *regla o norma de paro* derivada de un gráfico de control, idea que representa el instrumento para trasladar la información contenida en un gráfico hacia el área de toma de decisiones. En ese capítulo se estudian diversas normas de paro utilizadas comúnmente, y se introduce el índice de funcionamiento que permite comparar dos de dichas reglas, a saber, el número esperado de inspecciones que se realizan antes de detectar una alteración en el valor esperado de la característica relevante de los productos. Al concluir el capítulo se establece una fórmula para determinar el índice de funcionamiento para una clase amplia de normas de paro, resultado que representa una parte del camino hacia la consecución del quinto de los objetivos de este trabajo.

En el Capítulo 5 se presenta un enfoque algebraico al problema de deter-

minar el número esperado de inspecciones que, bajo una norma de paro general, deben realizarse hasta percibir que el proceso no se encuentra bajo control. La exposición inicia introduciendo un sistema especial de ecuaciones lineales, y determinando su única solución. El resultado central que se obtiene establece que, para determinar el índice de funcionamiento de una norma de paro, es suficiente resolver el sistema considerado seleccionando apropiadamente dos parámetros. Este hecho permite establecer, en el Teorema 5.5.1, una fórmula general que permite alcanzar el quinto de los propósitos planteados.

Finalmente, la exposición culmina en el Capítulo 6 con conclusiones y comentarios sobre el trabajo realizado.

# LA IDEA FUNDAMENTAL

En este capítulo se introduce el instrumento básico en el área de control de calidad, a saber, la idea de gráfico de control. La aplicación de esta herramienta permite monitorear el comportamiento de los rasgos esenciales de un producto conforme el proceso de producción en serie se desarrolla, posibilitando la detección de variaciones de las características de interés, y la consecuente implementación de acciones correctivas antes de que se fabrique un gran número de productos finales que serían rechazados en el mercado. Conjuntamente con las ideas básicas, la presentación incluye *dos caracterizaciones de los límites de control*; una de ellas involucra la minimización de la probabilidad de revisar el proceso productivo, mientras que la otra se obtiene optimizando la amplitud de la banda o zona de aceptación determinada por los límites de control. Por otro lado, el capítulo contiene una discusión sobre la determinación de cotas no paramétricas para la probabilidad de que, como producto de la implementación de un gráfico de control, se revise el proceso cuando no corresponde hacerlo. El resultado que se obtiene en esta dirección generaliza el teorema de Camp–Meidel sobre las desviaciones de una variable aleatoria con respecto a su valor esperado.

## Introducción

El propósito de este capítulo es introducir la noción de **gráfico de control**. Este instrumento, fundamental en el análisis de procesos productivos, fue introducida por el profesor Walter A. Shewhart en 1931, precisamente durante

la gran depresión económica mundial de este siglo (Shewart, 1931). En términos generales, un gráfico de control está asociado a una característica de interés de los objetos fabricados durante un proceso de producción, y es un medio para detectar variaciones de ese rasgo relevante. Como se mencionó en el capítulo precedente, uno de los propósitos del fabricante es asegurar que las propiedades esenciales de sus productos no varíen a través del tiempo. Sin embargo, no es posible controlar estrictamente todos los factores que determinan las peculiaridades relevantes del producto en cuestión, e invariablemente hay factores inciertos que ocasionan que la característica bajo estudio presente fluctuaciones al azar, de tal manera que el valor de la propiedad de interés que se observa en cada grupo de artículos inspeccionados es una variable aleatoria  $Y$ , la cual refleja, tanto el valor actual de la característica de interés, como la influencia de perturbaciones aleatorias. Un gráfico de control es un medio para detectar alteraciones en los rasgos esenciales de un producto antes de que un gran número de artículos anómalos sea producido, permitiendo aplicar las medidas necesarias para revertir los cambios no deseados en el proceso de producción.

La componente esencial de un gráfico de control es una región  $\mathcal{A}$ , en la cual—suponiendo que los rasgos relevantes de los productos no se han alterado—es ‘prácticamente seguro’ que el dato aleatorio  $Y$  obtenido de un grupo de productos finales tome sus valores; esta zona se determina postulando la distribución de  $Y$ , usualmente una distribución normal en el caso de que la característica de interés sea continua, o una distribución discreta especial cuando los productos se clasifican como aceptables o defectuosos, o de acuerdo a cierta escala discreta. En ambos casos, la forma precisa de la región  $\mathcal{A}$  se obtiene suponiendo que los parámetros que determinan la distribución de la variable aleatoria  $Y$  son conocidos, y una vez que la región  $\mathcal{A}$  se ha determinado, el gráfico se completa extrayendo periódicamente artículos finales de la línea de producción, obteniendo el valor correspondiente del rasgo de interés para cada grupo de artículos seleccionados, y **graficando**



los valores observados, prestando especial atención al hecho de que cada dato  $Y$  pertenezca a la zona  $\mathcal{A}$ , así como a otras características de la serie de observaciones  $(Y_1, Y_2, \dots)$  que se obtiene tras inspecciones sucesivas. El resultado de aplicar este procedimiento se puede representar en un tablero de forma gráfica, en el cual el personal involucrado puede observar fácilmente la forma en que los datos de la propiedad de interés se comportan conforme transcurre el tiempo.

Debido a que es 'prácticamente seguro' que el valor de  $Y$  obtenido de cada inspección pertenezca a  $\mathcal{A}$ —i.e.,  $\mathcal{A}$  se selecciona de tal forma que  $P[Y \in \mathcal{A}]$  sea muy cercana a 1—el hecho de que un valor de  $Y$  no caiga dentro de la zona  $\mathcal{A}$ , es tomado como un indicador de que los parámetros que determinan su distribución se han alterado, esto es, de que las observaciones  $(Y_1, Y_2, Y_3, \dots)$  obtenidas de las inspecciones consecutivas no determinan un proceso estacionario, y consecuentemente, que el proceso no se encuentra bajo control estadístico.

*El propósito de este capítulo es describir formalmente la idea de gráfico de control asociado a una característica de interés dada, suponiendo que la variable aleatoria  $Y$  que se obtiene en cada inspección es continua, esto es, tiene una densidad, y con este fin el material subsecuente ha sido organizado de la siguiente manera: En la Sección 2 se presentan de manera rigurosa las ideas que dan forma a la noción de gráfico de control, y se describe su construcción. En la Sección 3 se establece un resultado general sobre la manera de seleccionar los límites de control cuando las medias muestrales observadas tienen una distribución unimodal, de acuerdo al cual el valor original del parámetro de interés debe ubicarse en el centro del intervalo que los límites de control delimitan; posteriormente, en la Sección 4 se presentan dos ejemplos sobre la aplicación de estos resultados en la determinación de los límites de control. En la Sección 5 se considera el problema de obtener cotas no paramétricas para la probabilidad de que, al utilizar un gráfico de control, se declare erróneamente que el valor del parámetro de interés se ha alterado; el resultado principal es el Teorema 5.2, el cual es una generalización de un Teorema*

formulado por Camp–Meidel. En la Sección 6 se analiza brevemente la relación de los métodos de toma de decisiones basados en intervalos de confianza y prueba de hipótesis con la aplicación de gráficos de control, mientras que en la Sección 7 se presenta una caracterización alternativa de los límites de control, la cual establece que la elección de los mismos determinada en la Sección 3 es la única que minimiza la amplitud de la banda de control en el gráfico. Finalmente, el capítulo concluye en la Sección 8 con algunos comentarios breves.

## Construcción de un Gráfico de Control.

En esta sección se describe el procedimiento general para elaborar un gráfico de control correspondiente a una característica de interés determinada. Como punto de partida, es conveniente introducir la siguiente notación:

$\theta$  denota el valor esperado del rasgo relevante de los artículos fabricados.

Por ejemplo, al fabricar una substancia,  $\theta$  podría ser el nivel medio de acidez o de la cantidad de impurezas contenidas en una volumen dado; en un proceso de producción de pernos, es importante considerar la dureza promedio de los mismos, y al envasar productos agropecuarios,  $\theta$  podría representar el peso esperado de las unidades enviadas al mercado. Por otro lado, debido al desgaste de la maquinaria involucrada, cambios en el personal operario, o variaciones en las propiedades de los insumos, entre otras posibilidades, el valor de  $\theta$  puede cambiar conforme el proceso productivo se desarrolla. Como el interés del fabricante es mantener un estándar en sus productos, es importante que dichos cambios sean detectados. Suponga que

$\theta_0$  es el valor actual de  $\theta$ ,

y que se toma una muestra de los artículos producidos, digamos de tamaño  $n$ . En cada artículo seleccionado se mide la característica de interés, representando  $X_1, X_2, \dots, X_n$  las mediciones obtenidas. A partir estos números se construye el

estadístico

$$Y = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n},$$

la media muestral de  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Después de este preámbulo, los pasos para construir un gráfico pueden describirse como sigue (Duncan, 1989; John 1990):

**Etapa 1.** Determinar o postular la distribución de  $Y$  cuando el  $\theta$  asume su valor actual  $\theta_0$ .

**Etapa 2.** Encontrar números  $U$  y  $L$  tales que

$$P_{\theta_0}[L \leq Y \leq U] = 1 - \alpha. \quad (2.1)$$

Esta igualdad significa que bajo la condición de que  $\theta$  asume su valor original  $\theta_0$ , la probabilidad de que  $Y$  tome un valor entre  $L$  y  $U$  es  $1 - \alpha$ ; este último número es el *nivel de inclusión*, y el intervalo  $[L, U]$  se conoce como *intervalo de predicción para  $Y$*  con nivel  $1 - \alpha$  (Graybill, 1986). En el contexto general descrito en la Sección 1, la zona  $\mathcal{A}$  es el intervalo  $[L, U]$ , y al seleccionar  $1 - \alpha$  cercano a uno, entonces es ‘prácticamente seguro’ que  $Y$  asuma un valor en la región  $\mathcal{A} = [L, U]$ ; el valor específico de  $1 - \alpha$  es seleccionado por el ingeniero de control, y por regla general se prescribe un valor ‘cercano’ a uno para esta cantidad; los números  $L$  y  $U$  en (2.1) se refieren como los *límites de control inferior y superior*, respectivamente.

**Etapa 3.** Marque el intervalo  $[L, U]$  sobre el eje vertical del plano coordenado, y trace rectas horizontales a través de los puntos  $(0, L)$  y  $(0, U)$ , delimitando la región

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \mid L \leq y \leq U\}.$$

Note que  $\theta_0$  aparece ubicado en el centro del intervalo  $[L, U]$  marcado sobre el eje  $y$ ; como se establecerá más adelante en el Teorema 3.1, esta es la situación típica cuando, al suponer que el valor actual de  $\theta$  es  $\theta_0$ , la distribución de  $Y$  es simétrica alrededor de  $\theta_0$ .

**Etapa 4.** De los productos finales seleccione, a intervalos posiblemente regulares, grupos disjuntos de  $n$  artículos, calcule el valor  $Y_i$  de la media de la característica de interés de los  $n$  productos finales seleccionados en el  $i$ -ésimo bloque, y marque el punto o correspondiente  $(i, Y_i)$  en el plano coordenado; usualmente el tamaño  $n$  de los bloques inspeccionados es un número pequeño, como por ejemplo cuatro o cinco.

El dibujo que se obtiene al marcar continuamente los puntos  $(i, Y_i)$  es el *gráfico de control para la característica de interés correspondiente al valor original*  $\theta_0$  del parámetro de interés. Su utilidad radica en que es un medio visual simple para detectar variaciones en el valor de  $\theta$ , en cuyo caso el proceso de producción será revisado para encontrar la causa de la alteración. Para entender la aplicación de un gráfico de control, observe primero que para cada dato  $Y_i$  se tiene la siguiente equivalencia:

$$L \leq Y_i \leq U \iff (i, Y_i) \in \mathcal{A}.$$

Por otro lado, debido a que el nivel de inclusión  $1 - \alpha$  se selecciona ‘cercano a 1’, el observador percibe como ‘prácticamente seguro’ que cuando el valor actual de  $\theta$  es  $\theta_0$ , cada dato  $Y_i$  pertenezca al intervalo  $[L, U]$ , lo cual equivale a que los puntos  $(i, Y_i)$  que se marcan en el plano coordenado pertenezcan a la zona  $\mathcal{A}$ . En otras palabras, el observador considerará ‘dentro de lo normal’ el hecho de que los puntos que sucesivamente se señalan en el plano coordenado se ubiquen dentro de  $\mathcal{A}$  y pensará que el valor de  $\theta$  se mantiene en  $\theta_0$ . Sin embargo, cuando una de esas marcas se localice fuera de la región  $\mathcal{A}$ , habrá observado un evento que, bajo la condición de que  $\theta = \theta_0$ , tiene sólo una probabilidad  $\alpha$  de ocurrir, percibiendo este hecho como una señal de que el valor de  $\theta$  se ha modificado, alejándose del valor  $\theta_0$  que tenía originalmente, de manera que el valor medio de la característica de interés se ha alterado. En estas circunstancias, se emprenderán acciones que busquen detectar la causa del cambio en el valor de  $\theta$  y se tomarán las medidas correctivas necesarias. La norma que se ha descrito para la actuación

del observador se conoce como una *regla de paro*—pues la revisión del proceso de producción puede, en general, implicar un paro parcial o total de las actividades. Desde luego, esta no es la única regla de paro que puede derivarse de un gráfico de control, y varias de ellas serán ampliamente estudiadas en el Capítulo 4. Por el momento es oportuno señalar que, en general, una regla de paro presta atención al comportamiento conjunto de *varias medias muestrales*, y no solamente al valor observado de la media más reciente. Una descripción detallada de varias reglas de paro de uso común puede encontrarse en (John, 1990).

## Elección de los Límites de Control

Antes de ejemplificar la construcción de un gráfico de control, es conveniente abordar dos aspectos, posiblemente sutiles, en la descripción de cuatro pasos presentada anteriormente. Aunque la elección del nivel de inclusión es ciertamente arbitraria, quedando a elección del ingeniero de control, una vez que  $1 - \alpha$  se ha fijado, los límites de control  $L$  y  $U$  en la etapa dos pueden seleccionarse, en general, de infinidad de formas, y es necesario considerar la manera precisa de establecer los valores que se usarán. En esta sección se establecerá un marco teórico bajo el cual el valor original del parámetro de interés, i.e.,  $\theta_0$ , es el punto medio del intervalo delimitado por los límites de control.

Como ya se ha mencionado, cuando se analiza el  $i$ -ésimo grupo de artículos y se observa que la correspondiente media muestral  $Y_i$  satisface

$$Y_i \notin [L, U], \tag{3.1}$$

entonces se considera que el valor actual de  $\theta$  es diferente del valor original  $\theta_0$ ; la consecuencia práctica es que se emprende una búsqueda de una causa que explique la alteración, la cual puede implicar que se pare el proceso de producción. Luego, es deseable requerir que la probabilidad del evento (3.1) sea mayor o igual cuando  $\theta \neq \theta_0$  que cuando  $\theta = \theta_0$ , condición que se expresa formalmente como sigue: Para

todo  $\theta$ ,

$$P_{\theta}[Y_i \notin [L, U]] \geq P_{\theta_0}[Y_i \notin [L, U]] = \alpha. \quad (3.2)$$

El objetivo principal de esta sección es establecer que bajo condiciones adecuadas de simetría, esta condición determina de manera única a los límites de control  $L$  y  $U$ . El resultado preciso en esta dirección se establece en el Teorema 3.1 líneas más adelante, y utiliza la idea de función unimodal introducida a continuación, la cual es utilizada frecuentemente en el estudio de desigualdades probabilísticas (Tong, 1987).

**Definición 3.1.** (a) Sea  $f(x)$  una función de densidad continua. En este caso,  $f(x)$  es unimodal en cero si satisfacen los siguientes requerimientos (i)–(iii):

(i)  $f(0) \geq f(x)$  para todo  $x$ ;

(ii)  $f(x)$  es simétrica alrededor de cero, esto es, para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = f(-x)$ .

(iii)  $f(x)$  es estrictamente decreciente en  $(0, \infty)$ .

(b) La densidad  $f(x)$  es unimodal en un número  $\mu \in \mathbb{R}$ , si  $f(x - \mu)$  es una densidad unimodal en cero.

Las siguientes funciones de densidad son unimodales en cero:

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|} \quad (\text{densidad de Laplace})$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad (\text{densidad de Cauchy}),$$

y de dede luego, la densidad normal

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}.$$

En cada uno de estos casos, es claro que  $f(x)$  alcanza su valor máximo en cero, que  $f(x)$  es simétrica, y que el valor de  $f(x)$  disminuye cuando se avanza en el semieje positivo. El siguiente teorema muestra que cuando la función de densidad

de las medias muestrales  $Y_i$  es unimodal, entonces los límites de control  $L$  y  $U$  se determinan de manera única cuando se impone el requisito natural en (3.2).

**Teorema 3.1.** Suponga que la densidad de las medias  $Y_i$  es de la forma

$$f(x; \theta) = \frac{1}{\tau} g\left(\frac{x - \theta}{\tau}\right), \quad (3.3)$$

donde  $g(x)$  es una densidad unimodal en cero, y  $\tau > 0$  es un número positivo dado.

Para  $\beta > 0$ , sea  $k_\beta \in \mathbb{R}$  el percentil superior de orden  $\beta$  correspondiente a  $g(x)$ ,

esto es,

$$\int_{k_\beta}^{\infty} g(x) dx = \beta. \quad (3.4)$$

(i) Dado el nivel de inclusión  $1 - \alpha$ , defina

$$L = \theta_0 - k_{\alpha/2}\tau, \quad U = \theta_0 + k_{\alpha/2}\tau. \quad (3.5)$$

Entonces

$$P_\theta[Y_i \notin [L, U]] \geq P_{\theta_0}[Y_i \notin [L, U]] = \alpha, \quad \text{para todo } \theta. \quad (3.6)$$

Recíprocamente,

(ii) Si la condición (3.6) se cumple, entonces  $L$  y  $U$  están dados por (3.5).

**Observación 3.1.** (i) La condición impuesta en el teorema sobre la densidad de las medias  $Y_i$  es equivalente al requerimiento de que  $f(x; \theta)$  sea unimodal en  $\theta$ .

El parámetro  $\tau$  en el lado derecho de (3.3) podría omitirse, pero ha sido incluido porque en el caso en que la densidad  $g(x)$  tiene varianza uno, entonces  $\tau$  representa la desviación estándar de las observaciones  $Y_i$ .

(ii) La igualdad (3.3) es un *modelo de localización-escala* para la distribución de las medias muestrales (Lehman, 1991). Sin embargo, en contraste con el marco de trabajo es dicha referencia, en el contexto presente se supone que  $\tau$ —el parámetro de escala en (3.3)—es conocido, supuesto que se adopta por conveniencia para la

exposición y que será abandonado en el siguiente capítulo. El parámetro de interés  $\theta$  se denomina *parámetro de localización* en el modelo (3.3).

(iii) Suponga que el nivel de inclusión  $1 - \alpha$  está dado. Si  $\gamma$  y  $\beta$  son dos números positivos tales que

$$\alpha = \gamma + \beta, \quad (3.7)$$

defina

$$L' = \theta_0 - k_\gamma \tau, \quad U' = \theta_0 + k_\beta \tau. \quad (3.8)$$

En este caso, bajo las condiciones en el Teorema 3.1, se tiene que

$$P_{\theta_0}[L' \leq Y_i \leq U'] = 1 - \alpha.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} P_{\theta_0}[L' \leq Y_i \leq U'] &= 1 - (P_{\theta_0}[Y_i < L'] + P_{\theta_0}[Y_i > U']) \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{L'} f(x; \theta_0) dx - \int_{U'}^{\infty} f(x; \theta_0) dx \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{\theta_0 - k_\gamma \tau} \frac{1}{\tau} g\left(\frac{x - \theta_0}{\tau}\right) dx - \int_{\theta_0 + k_\beta \tau}^{\infty} \frac{1}{\tau} g\left(\frac{x - \theta_0}{\tau}\right) dx \end{aligned}$$

A continuación, realice el el cambio de variable

$$y = \frac{x - \theta_0}{\tau},$$

note que  $\tau dy = dx$  y observe las siguientes equivalencias:

$$x = \theta_0 - k_\gamma \tau \iff y = -k_\gamma \quad \text{y} \quad x = \theta_0 + k_\beta \tau \iff y = k_\beta.$$

Utilizando estos hechos, se desprende que

$$\begin{aligned} P_{\theta_0}[L' \leq Y_i \leq U'] &= 1 - \int_{-\infty}^{-k_\gamma} g(y) dy - \int_{k_\beta}^{\infty} g(y) dy \\ &= 1 - \int_{k_\gamma}^{\infty} g(y) dy - \int_{k_\beta}^{\infty} g(y) dy \\ &= 1 - \gamma - \beta \\ &= 1 - \alpha \end{aligned}$$



donde la segunda igualdad utilizó la simetría de la densidad  $g(\cdot)$  respecto al origen, y las dos últimas igualdades son consecuencia de (3.4) y (3.7). Este argumento muestra que  $L'$  y  $U'$  pueden usarse para generar un gráfico de control para  $\theta_0$  con nivel de inclusión  $1 - \alpha$ . Como los números positivos  $\gamma$  y  $\beta$  que satisfacen  $\gamma + \beta = \alpha$  pueden seleccionarse de infinidad de maneras, se desprende que hay un número infinito de posibilidades para seleccionar  $L$  y  $U$  en la construcción descrita en la Sección 2. Sin embargo, el Teorema 3.1 establece que entre todos los posibles límites de control, la pareja  $(L, U)$  en (3.5) es la única que satisface el requerimiento adicional (3.6).

**Demostración del Teorema 3.1.** (i) Suponga que  $L$  y  $U$  son como en (3.5). En este caso debe mostrarse que

$$P_{\theta}[Y_i \notin [L, U]] \geq P_{\theta_0}[Y_i \notin [L, U]] = \alpha, \quad \theta \neq \theta_0,$$

relación que es exactamente la presentada en (3.6) y que por conveniencia ha sido reproducida aquí. Para lograr este objetivo, primero observe que el argumento en la Observación 3.1(iii) aplicado con  $\gamma = \beta = \alpha/2$  muestra que  $P_{\theta_0}[Y_i \in [L, U]] = 1 - \alpha$ , de manera que

$$P_{\theta_0}[Y_i \notin [L, U]] = \alpha. \quad (3.9)$$

Por otro lado, para  $\theta \neq \theta_0$ ,

$$\begin{aligned} P_{\theta}[Y_i \notin [L, U]] &= P_{\theta}[Y < L] + P_{\theta}[Y > U] \\ &= \int_{-\infty}^L f(x; \theta) dx + \int_U^{\infty} f(x; \theta) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\theta_0 - k_{\alpha/2}\tau} \frac{1}{\tau} g\left(\frac{x - \theta}{\tau}\right) dx + \int_{\theta_0 + k_{\alpha/2}\tau}^{\infty} \frac{1}{\tau} g\left(\frac{x - \theta}{\tau}\right) dx \end{aligned}$$

Para simplificar esta expresión se efectuará el cambio de variable

$$y = \frac{x - \theta}{\tau}.$$

Observe que en este caso  $dx = \tau dy$  y que

$$x = \theta_0 - k_{\alpha/2}\tau \iff y = \frac{\theta_0 - \theta}{\tau} - k_{\alpha/2};$$

además,

$$x = \theta_0 + k_{\alpha/2}\tau \iff y = \frac{\theta_0 - \theta}{\tau} + k_{\alpha/2}.$$

Combinando estas últimas relaciones con la expresión para  $P_\theta[Y_i \notin [L, U]]$  se desprende que

$$P_\theta[Y_i \notin [L, U]] = \int_{-\infty}^{(\theta_0 - \theta)/2 - k_{\alpha/2}} g(y) dy + \int_{(\theta_0 - \theta)/2 + k_{\alpha/2}}^{\infty} g(y) dy. \quad (3.10)$$

A continuación se mostrará que la función

$$H(z) = \int_{-\infty}^{z - k_{\alpha/2}} g(x) dx + \int_{z + k_{\alpha/2}}^{\infty} g(x) dx \quad (3.11)$$

alcanza su valor mínimo en  $z = 0$ . Para verificar esta afirmación, note que

$$H'(z) = g(z - k_{\alpha/2}) - g(z + k_{\alpha/2}),$$

de donde, usando la simetría de  $g(\cdot)$ , se desprende que  $H'(0) = g(-k_{\alpha/2}) - g(k_{\alpha/2}) = 0$ , igualdad que muestra que 0 es un punto crítico de  $H(z)$ . Para verificar que  $H(z)$  alcanza su valor mínimo en 0 se aplicará el criterio de la primera derivada, para lo cual es necesario determinar el signo de  $H'(z)$  a ambos lados de cero. Con este propósito, considere las siguientes posibilidades para  $z$ :

**Caso 1.**  $z < 0$ . En esta situación se tiene que  $|z - k_{\alpha/2}| = -z + k_{\alpha/2}$ . Si  $k_{\alpha/2} \geq -z$  se satisface, entonces

$$|z - k_{\alpha/2}| = -z + k_{\alpha/2} > z + k_{\alpha/2} \geq 0;$$

como  $g(\cdot)$  es simétrica y *estrictamente* decreciente en  $[0, \infty)$ , se desprende que

$$\begin{aligned} H'(z) &= g(z - k_{\alpha/2}) - g(z + k_{\alpha/2}) \\ &= g(-|z - k_{\alpha/2}|) - g(z + k_{\alpha/2}) \\ &= g(|z - k_{\alpha/2}|) - g(z + k_{\alpha/2}) \\ &< 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, cuando  $k_{\alpha/2} < -z$  se tiene que  $|k_{\alpha/2} + z| = -z - k_{\alpha/2} < -z + k_{\alpha/2} = |z - k_{\alpha/2}|$ , de manera que

$$\begin{aligned} H'(z) &= g(z - k_{\alpha/2}) - g(z + k_{\alpha/2}) \\ &= g(-|z - k_{\alpha/2}|) - g(-|z + k_{\alpha/2}|) \\ &= g(|z - k_{\alpha/2}|) - g(|z + k_{\alpha/2}|) \\ &< 0, \end{aligned}$$

pues  $|z - k_{\alpha/2}| > |z + k_{\alpha/2}|$  y  $g(\cdot)$  es decreciente. En resumen: cuando  $z < 0$ , se tiene que  $H'(z) < 0$  en cualquier circunstancia.

**Caso 2.**  $z > 0$ . En este contexto suponga primero que  $z > k_{\alpha/2}$ , condición que implica que  $0 < z - k_{\alpha/2} < z + k_{\alpha/2}$ , y entonces

$$H'(z) = g(z - k_{\alpha/2}) - g(z + k_{\alpha/2}) > 0,$$

ya que  $g(\cdot)$  es decreciente en  $(0, \infty)$ . Suponga ahora que  $z \leq k_{\alpha/2}$ , de manera que  $|z - k_{\alpha/2}| = k_{\alpha/2} - z < z + k_{\alpha/2}$ , y entonces la simetría de  $g(\cdot)$  implica

$$\begin{aligned} H'(z) &= g(z - k_{\alpha/2}) - g(z + k_{\alpha/2}) \\ &= g(-|z - k_{\alpha/2}|) - g(z + k_{\alpha/2}) \\ &= g(|z - k_{\alpha/2}|) - g(z + k_{\alpha/2}) \\ &> 0, \end{aligned}$$

donde otra vez se utilizó que  $g(\cdot)$  es decreciente en  $(0, \infty)$ . Luego, cuando  $z > 0$  se tiene que  $H'(z) > 0$

El análisis precedente de la función  $H(\cdot)$  ha mostrado que

(a)  $H'(0) = 0$ ,

(b)  $H'(z) < 0$  para  $z < 0$ , mientras que

(c)  $H'(z) > 0$  si  $z > 0$ .

A partir de estas propiedades, el criterio de la primera derivada establecido en el Capítulo 3 de (Fulks, 1981), permite concluir que  $H(\cdot)$  alcanza su valor mínimo en 0, y que, más aún, este es un punto de mínimo estricto, esto es,

$$H(z) > H(0), \quad z \neq 0. \quad (3.12)$$

Para continuar observe que combinando (3.10) y (3.11) se obtiene que

$$P_{\theta}[Y \notin [L, U]] = H\left(\frac{\theta_0 - \theta}{\tau}\right)$$

de manera que a partir de (3.12) se obtiene que para todo  $\theta$ ,

$$\begin{aligned} P_{\theta}[Y \notin [L, U]] &= H\left(\frac{\theta_0 - \theta}{\tau}\right) \\ &\geq H(0) \\ &= P_{\theta_0}[Y \notin [L, U]], \end{aligned}$$

desigualdad que conjuntamente con (3.9) produce

$$P_{\theta}[Y \notin [L, U]] \geq P_{\theta_0}[Y \notin [L, U]] = \alpha,$$

de tal forma que (3.6) se satisface.

(ii) Suponga que para todo  $\theta$

$$P_{\theta}[Y \notin [L, U]] \geq P_{\theta_0}[Y \notin [L, U]] = \alpha.$$

Bajo esta condición debe mostrarse que la pareja  $(L, U)$  está dada por (3.5). Con este fin, defina

$$\theta^* = \frac{L + U}{2}, \quad \text{y} \quad k^* = \frac{U - L}{2\tau},$$

así como la función  $H^*(z)$  mediante

$$H^*(z) = \int_{-\infty}^{z-k^*} g(x) dx + \int_{z+k^*}^{\infty} g(x) dx.$$

Note que esta definición es análoga a la establecida en (3.11), y que

$$L = \theta^* - k^*\tau, \quad U = \theta^* + k^*\tau. \quad (3.13)$$

Usando argumentos análogos a los utilizados en la parte (i) se desprende que  $H^*(z)$  alcanza su valor mínimo en un único punto, a saber,  $z = 0$ , de manera que

$$H^*(z) > H^*(0), \quad z \neq 0; \quad (3.14)$$

además, utilizando las mismas ideas que condujeron a (3.12) se verifica que la igualdad

$$P_\theta[Y_i \notin [L, U]] = H^* \left( \frac{\theta^* - \theta}{\tau} \right) \quad (3.15)$$

se satisface para todo  $\theta$ , de manera que (3.14) implica que

$$P_\theta[Y_i \notin [L, U]] > P_{\theta^*}[Y_i \notin [L, U]]. \quad \theta \neq \theta^*.$$

Utilizando esta relación se obtiene que  $\theta^* = \theta_0$ ; en efecto, si  $\theta_0 \neq \theta^*$ , se desprende que

$$P_{\theta_0}[Y_i \notin [L, U]] > P_{\theta^*}[Y_i \notin [L, U]],$$

desigualdad que contradice (3.6) con  $\theta = \theta^*$ . Luego,

$$\theta^* = \theta_0. \quad (3.16)$$

Para concluir observe que a partir de (3.6) se tiene que  $P_{\theta_0}[Y_i \notin [L, U]] = \alpha$ , de manera que la definición de  $H^*$ , (3.15) y (3.16) implican que

$$\begin{aligned} \alpha &= P_{\theta_0}[Y_i \notin [L, U]] \\ &= H^* \left( \frac{\theta_0 - \theta^*}{\tau} \right) \\ &= H^*(0) \\ &= \int_{-\infty}^{-k^*} g(x) dx + \int_{k^*}^{\infty} g(x) dx \\ &= 2 \int_{k^*}^{\infty} g(x) dx \end{aligned}$$

donde en la última igualdad se utilizó la simetría de  $g(\cdot)$  respecto al origen. Por lo tanto,

$$\int_{k^*}^{\infty} g(x) dx = \frac{\alpha}{2},$$

y se concluye que

$$k^* = k_{\alpha/2}; \quad (3.17)$$

vea la igualdad (3.4) para la definición de  $k_{\alpha/2}$ . Finalmente, combinando (3.13) con (3.16) y (3.17) se obtiene que

$$L = \theta_0 - k_{\alpha/2}\tau, \quad \text{y} \quad U = \theta_0 + k_{\alpha/2}\tau,$$

de manera que  $L$  y  $U$  están dadas como en (3.5). □

## Ejemplos

En esta sección se proporcionan dos ejemplos sobre la etapa fundamental en la construcción de un gráfico de control, a saber, la determinación de los límites  $L$  y  $U$ . Como se infiere del Teorema 3.1, es necesario conocer o postular la distribución de las medias muestrales  $Y_i$  de los grupos de artículos inspeccionados. En las aplicaciones, lo que se hace es *suponer que el dato  $X$  que se obtiene inspeccionando un artículo tiene una distribución que se relaciona de manera específica con el valor actual  $\theta_0$  del parámetro de interés, y entonces se deduce la correspondiente distribución de la media muestral  $Y$* . Este enfoque se ilustra en los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 1.** Suponga que el dato  $X$  que se obtiene al analizar la característica de interés en un artículo determinado tiene la densidad

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\tau}{\tau^2 + (x - \theta)^2}, \quad (4.1)$$

la cual es la densidad de Cauchy con centro  $\theta$  y parámetro de dispersión  $\tau$ . En cada inspección se extraen  $n$  artículos, se obtiene el valor de la característica de interés para cada uno de ellos, y se registran los datos  $X_1, X_2, \dots, X_n$  correspondientes a cada uno de los artículos inspeccionados; note que cada observación  $X_i$  tiene la densidad de Cauchy en (4.1). Para determinar la densidad de la media muestral

$$Y = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

se utilizan los siguientes hechos:

(a) La densidad de  $X_1 + X_2 + \dots + X_n$  es de Cauchy, con el mismo centro  $\theta$  y con parámetro de dispersión  $n\tau$ , esto es,

$$f_{X_1+X_2+\dots+X_n}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{n\tau}{n^2\tau^2 + (x - \theta)^2};$$

(b) La media muestral  $Y$  se obtiene multiplicando la suma  $X_1 + X_2 + \dots + X_n$  por  $1/n$ , de manera que la densidad de  $Y$  también es de Cauchy; el centro de esta densidad es  $\theta$  y su parámetro de dispersión es  $\frac{1}{n} \times n\tau = \tau$ , de manera que

$$f_Y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\tau}{\tau^2 + (x - \theta)^2}, \quad (4.2)$$

es decir, la media muestral  $Y$  tiene, en el caso presente, la misma distribución que cada una de las observaciones individuales; las afirmaciones (a) y (b) se obtienen en el Apéndice de este capítulo utilizando la expresión para la función característica de una distribución de Cauchy que se establece, por ejemplo, en (Mood *et. al.*, 1985), o en (Dudewicz y Mishra, 1988).

A partir de (4.2) los límites de control  $L$  y  $U$  se obtienen como sigue: primero observe que

$$f_Y(x) = \frac{1}{\tau} g\left(\frac{x - \theta}{\tau}\right), \quad (4.3)$$

donde

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + x^2}$$

es la densidad estándar de Cauchy, con centro cero y parámetro de dispersión uno. Utilizando las expresiones en (3.5), los límites de control correspondientes a un nivel de inclusión  $1 - \alpha$  dado, pueden ahora determinarse cuando se conozca el percentil superior de orden  $\alpha/2$  de la densidad  $g(x)$ . Dicho percentil satisface la ecuación (vea (3.4))

$$\int_{k_{\alpha/2}}^{\infty} g(x) dx = \frac{\alpha}{2}$$

de donde se desprende que

$$\begin{aligned}
 \frac{\alpha}{2} &= \int_{k_{\alpha/2}}^{\infty} g(x) dx \\
 &= \int_{k_{\alpha/2}}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{k_{\alpha/2}}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \arctan(x) \Big|_{k_{\alpha/2}}^{\infty} \\
 &= \frac{1}{\pi} [\arctan(\infty) - \arctan(k_{\alpha/2})] \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \arctan(k_{\alpha/2}) \right] \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{\arctan(k_{\alpha/2})}{\pi}.
 \end{aligned}$$

Luego,  $\arctan(k_{\alpha/2}) = \frac{\pi(1-\alpha)}{2}$ , de manera que

$$k_{\alpha/2} = \tan\left(\frac{\pi(1-\alpha)}{2}\right).$$

Luego, utilizando la expresión (3.5), los límites de control correspondientes al valor  $\theta_0$  del parámetro de interés están dados por

$$L = \theta_0 - \tau \tan\left(\frac{\pi(1-\alpha)}{2}\right), \quad U = \theta_0 + \tau \tan\left(\frac{\pi(1-\alpha)}{2}\right).$$

□

**Ejemplo 2.** Suponga ahora que el dato  $X$  que se obtiene al analizar la característica de interés en un artículo determinado está normalmente distribuido:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\theta)^2/2\sigma^2}; \quad (4.3)$$

aquí,  $\sigma^2 > 0$  es la varianza de  $X$ . Por mucho, esta es la hipótesis más común acerca de la distribución de  $X$  y es la condición sobre la cual usualmente se construyen los gráficos de control asociados a una característica continua. Como antes, en



cada inspección se extraen  $n$  artículos, se obtiene el valor de la característica de interés para cada uno de ellos, se anotan los correspondientes valores  $X_1, X_2, \dots, X_n$  observados y se calcula la media muestral

$$Y = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}.$$

Como las observaciones  $X_i$  son una muestra de la densidad (4.3) se desprende que

$$f_Y(x) = \frac{1}{\tau\sqrt{2\pi}} e^{(x-\theta)^2/2\tau^2}; \quad (4.4)$$

donde

$$\tau = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (4.5)$$

es la desviación estándar de  $Y$ . Note que

$$f_Y(x) = \frac{1}{\tau} g\left(\frac{x-\theta}{\tau}\right),$$

donde  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$  es la densidad normal estándar. Para determinar los límites de control es necesario encontrar los percentiles superiores de esta densidad; éstos se encuentran ampliamente tabulados y se denotan mediante  $z_\beta$ , esto es, para cada  $\beta \in (0, 1)$

$$\int_{z_\beta}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = \beta.$$

Los límites de control correspondientes al gráfico determinado por el valor original  $\theta_0$  del parámetro de interés y el nivel de inclusión  $1 - \alpha$  son

$$L = \theta_0 - z_{\alpha/2}\tau = \theta_0 - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad U = \theta_0 + z_{\alpha/2}\tau = \theta_0 + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Como se mencionó anteriormente, la hipótesis de normalidad de las observaciones  $X_i$  es frecuentemente utilizada y  $\alpha$  se prescribe como un número pequeño, de manera que  $1 - \alpha$  sea 'casi' uno. Cuando  $\alpha = 0.0027$ , una consulta a las tablas de la distribución normal estándar muestra que  $z_{\alpha/2} = 3$  y los límites de control son  $L = \theta_0 - 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  y  $U = \theta_0 + 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ . Con estos límites, hay una probabilidad de

0.0027 de observar que una media  $Y$  caiga fuera del intervalo  $[L, U]$  a pesar de que no haya habido cambio en su distribución, particularmente en el parámetro de interés  $\theta = \theta_0$ . Notando que  $1/370 \approx 0.0027$ , se sigue que, si  $\theta$  conserva su valor original, a largo plazo se tendrá que sólo en una de cada 370 veces que se obtenga una media muestral  $Y$ , ésta se ubicará fuera de los límites de control y el proceso productivo será revisado innecesariamente, pues el fenómeno de que el dato  $Y$  se ubique fuera de los límites de control se debió simplemente a fluctuaciones aleatorias inherentes al proceso productivo.  $\square$

Hay dos aspectos importantes que debe resaltarse en los dos ejemplos anteriores: Primero, los límites de control que se encuentran a través de la expresión (3.5) involucran, tanto al valor original  $\theta_0$  del parámetro de interés, como a un parámetro adicional, a saber,  $\tau$ , el cual puede pensarse como una medida de la dispersión de la media muestral  $Y$  alrededor de  $\theta$ . En el Ejemplo 1,  $\tau$  es el parámetro de dispersión de la distribución de los datos individuales  $X_i$ , mientras que en el Ejemplo 2  $\tau$  es  $\sigma/\sqrt{n}$ ; en este último caso,  $\tau$  es la desviación estándar de  $Y$ . Más aún, cuando la densidad (unimodal en cero)  $g(x)$  en (3.3) tiene varianza unitaria,  $\tau$  es, invariablemente la varianza de  $Y$ . En los ejemplos anteriores se ha supuesto tácitamente que  $\tau$  es conocido, pero en las aplicaciones  $\tau$  debe, usualmente, estimarse a partir de la información obtenida de la inspección de algunos grupos de artículos.

Segundo, por otro lado, el hecho de que los límites de control involucren a una medida de la dispersión de  $Y$  alrededor de  $\theta$ , tiene consecuencias importantes. El proceso será revisado cuando una de las medias  $Y_i$  obtenidas al desarrollarse el proceso productivo no pertenezca al intervalo  $[L, U]$ . La idea detrás de esta norma de actuación es que si el parámetro de interés  $\theta$  en el momento de inspeccionar el  $i$ -ésimo grupo de artículos continua tomando su valor original  $\theta_0$ , entonces el evento  $Y_i \notin [L, U]$  tiene solamente una probabilidad  $\alpha$ , la cual es muy pequeña, y por lo tanto 'no es natural' esperar que el evento  $Y_i \notin [L, U]$  sea observado.

Sin embargo,  $L$  y  $U$  involucran al parámetro de dispersión  $\tau$ , y aún en el caso de que éste sea conocido cuando se trazan las líneas de control, es posible que  $\tau$  aumente conforme avanza el proceso de producción, lo cual repercute en que la probabilidad del evento  $Y_i \notin [L, U]$  también se incremente, de manera que ya no sea ‘extraño’ observarlo. Este comentario pretende enfatizar que además de monitorear el comportamiento de las medidas muestrales  $Y_i$ , en la práctica es necesario realizar un rastreo similar para valorar el comportamiento de su parámetro de dispersión.

Los dos aspectos mencionados serán abordados en el Capítulo 3, donde se considera con detalle la construcción de gráficos de control para las medias y las varianzas de las mediciones tomadas en cada uno de los grupos de artículos inspeccionados. La idea general es que en las aplicaciones es necesario implementar *dos* gráficos, uno para monitorear los cambios en el valor esperado de la característica de interés  $\theta$ , y otro para rastrear las alteraciones en la variabilidad de los datos observados.

## Probabilidad de un Punto Fuera de Control

Los límites de control en el Teorema 3.1 se determinan suponiendo un modelo de localización–escala particular para las medias muestrales  $Y_i$ . Suponga que la densidad  $g(x)$  en (3.3) tiene varianza unitaria, de manera que el parámetro  $\tau$  en esa igualdad es la varianza de  $Y$ , la media muestral de los  $n$  datos obtenidos de un grupo de artículos inspeccionados. Los límites de control son  $L = \theta_0 - k_{\alpha/2}\tau$  y  $U = \theta_0 + k_{\alpha/2}\tau$ , los cuales satisfacen  $P_{\theta_0}[Y_i \notin [L, U]] = \alpha$  para cada  $i$ , siempre y cuando el modelo (3.3) sea correcto; recuerde que  $k_{\alpha/2}$  es el percentil superior de orden  $\alpha/2$  de la densidad  $g(x)$ . En esta sección se considera el siguiente problema: ¿Qué puede decirse acerca de  $P_{\theta_0}[Y_i \notin [L, U]]$  cuando el modelo (3.3) no es correcto? Una pregunta similar ha sido abordada en (Schilling y Nelson, 1976), donde se investiga el comportamiento de los límites de control cuando la hipótesis de normalidad de las observaciones no se satisface.

Para plantear la pregunta anterior de manera formal, suponga que los límites de control  $L$  y  $U$  son de la forma

$$L = \theta_0 - k\tau, \quad U = \theta_0 + k\tau, \quad (5.1)$$

donde

$$\tau = \sqrt{\text{Var}[Y]} \quad (5.2)$$

es la varianza de  $Y$ . Con esta notación, el propósito de esta sección puede expresarse de la siguiente manera:

Determinar una cota superior para  $P_{\theta_0}[Y \notin [L, M]]$ .

Desde luego, hay una herramienta clásica que permite abordar esa cuestión, a saber, la desigualdad de Tchebychev: Si  $c > 0$ , entonces, para cualquier variable aleatoria  $Y$  con  $E[Y] = \theta_0$ ,

$$P[|Y - \theta_0| > c] \leq \frac{\text{Var}[Y]}{c^2}; \quad (5.3)$$

vea, por ejemplo, (Mood *et. al.*, 1985), o (Dudewicz y Mishra, 1988). Observe que

$$Y \notin [L, M] \iff |Y - \theta_0| > k\tau, \quad (5.4)$$

de manera que

$$P_{\theta_0}[Y \notin [L, M]] = P_{\theta_0}[|Y - \theta_0| > k\tau]$$

y utilizando (5.2) y (5.3) con  $c = k\tau$  se desprende que

$$P_{\theta_0}[Y \notin [L, M]] \leq \frac{1}{k^2}; \quad (5.5)$$

note que esta desigualdad es válida sin importar la forma específica de la distribución de  $Y$ , por lo que es de naturaleza no paramétrica. Por ejemplo, cuando  $k = 3$ , (5.5) establece que  $P_{\theta_0}[Y \notin [L, M]] \leq 1/3^2 = 1/9$ , de manera que, si  $\theta_0$  no cambia (y la varianza de  $Y$  permanece inalterada), entonces puede asegurarse

que a lo más en uno de cada nueve ocasiones se observará un punto  $Y$  fuera de control y se inspeccionará innecesariamente el proceso productivo. Esta cifra debe compararse con la obtenida en el Ejemplo 2 de la sección anterior, en donde se obtuvo que *bajo la condición de normalidad* de las observaciones  $X_i$ , la probabilidad de observar un punto fuera de los límites de control cuando  $k = 3$  y  $\theta$  y  $\tau$  no se alteran, es sólo  $1/370$ . Esto muestra que la cota (5.2) puede ser bastante holgada en casos específicos. El siguiente teorema proporciona condiciones bajo las cuales la cota en (5.5) puede mejorarse.

**Teorema 5.1.**[Teorema de Camp–Meidel (Duncan, 1989).] Suponga que la densidad  $f_Y$  de la variable aleatoria  $Y$  es unimodal en  $\theta_0$  (vea la Definición 3.1), y que  $Y$  tiene segundo momento finito. En este caso, para cada  $c > 0$ ,

$$P[|Y - \theta_0| \geq c] \leq \frac{\text{Var}[Y]}{2.25c^2} \quad (5.7)$$

La demostración de este Teorema se omite, pues se establecerá un resultado más general en el Teorema 5.2 que se presenta más adelante. Observe que las hipótesis en el Teorema 5.1 permiten aumentar el denominador en la extrema derecha de la desigualdad de Tchebichev en (5.3); en efecto, el denominador en la desigualdad de Camp–Meidel es  $2.25c^2$ , mientras que en (5.3) es sólo  $c^2$ . Cuando la densidad de las medias muestrales es unimodal en el valor original  $\theta_0$  del parámetro de interés, y los límites de control son como en (5.1) y (5.2), la desigualdad de Camp–Meidel permite concluir que

$$P_{\theta_0}[Y \notin [L, U]] = P_{\theta_0}[|Y - \theta_0| > k\tau] \leq \frac{\text{Var}[Y]}{2.25k^2\tau^2} = \frac{1}{2.25k^2} \quad (5.6)$$

Aplicando esta desigualdad a los límites de control en (5.2), con  $k = 3$  se sigue que

$$P_{\theta_0}[Y \notin [L, U]] \leq \frac{1}{2.25(3)^2} = \frac{1}{20.25},$$

de manera que cuando la media y varianza de  $Y$  no cambian, se puede asegurar que el evento  $[Y \notin [L, U]]$  será observado sólo en una de cada 20 inspecciones, cifra que

debe ser comparada con la obtenida a partir de la desigualdad de Tchevychev—una de cada nueve inspecciones. Por supuesto, la disminución en la cota para  $P_{\theta_0}[Y \notin [L, U]]$  es posible por la imposición de condiciones adicionales en el Teorema de Camp–Meidel, a saber, la unimodalidad de la densidad de  $Y$  con respecto a su media  $\theta_0$ . El siguiente resultado, el cual es la principal contribución técnica que se realiza en este capítulo, generaliza el Teorema 5.1, en el sentido de que muestra que bajo condiciones más débiles sobre la densidad de  $Y$ , es aún posible seguir obteniendo la desigualdad (5.7).

**Teorema 5.2.** Sea  $Y$  una variable aleatoria con media  $\theta_0$  y suponga que su densidad  $f(y)$  satisface la siguiente condición:

$$y \mapsto f(\theta_0 + y) + f(\theta_0 - y), \quad \text{decrece en } [0, \infty). \quad (5.8)$$

En este caso, para cada  $b > 0$ ,

$$P[|Y - \theta_0| \geq b] \leq \frac{\text{Var}[Y]}{2.25b^2}$$

En este teorema se ha relajado la condición de unimodalidad de  $f_Y$  imponiendo la condición menos restrictiva en (5.8). El argumento que se utiliza para demostrar este resultado depende de la aplicación de la desigualdad de Jensen, resultado que permite comparar los efectos de intercambiar la aplicación de una función y del operador de valor esperado.

**Lema 5.1.** [Desigualdad de Jensen.] Sea  $G(x)$  una función convexa. Si  $Y$  es una variable aleatoria que asume valores en el dominio de  $G$ , entonces

$$E[G(Y)] \geq G(E[Y]).$$

Una demostración de este resultado puede encontrarse, por ejemplo, en (Mood *et al.*, 1985), (Dudwicz y Mishra, 1988), o en (Ash, 1975).

**Observación 5.1.** La utilidad del Lema 5.1 depende de la habilidad para detectar la convexidad de una función  $G(\cdot)$ . Una condición suficiente para que  $G(x)$  sea una función convexa es que su derivada  $G'(x)$  sea *creciente* en su dominio.

**Demostración del Teorema 5.2.** Como punto de partida, observe que

$$\begin{aligned}\text{Var}[Y] &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \theta_0)^2 f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(y + \theta_0) dy\end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se obtuvo realizando el cambio de variable  $y = x - \theta_0$ .

Descomponiendo la segunda integral sobre los dos semiejes, se desprende que

$$\begin{aligned}\text{Var}[Y] &= \int_{-\infty}^0 y^2 f(y + \theta_0) dy + \int_0^{\infty} y^2 f(y + \theta_0) dy \\ &= \int_0^{\infty} z^2 f(\theta_0 - z) dz + \int_0^{\infty} y^2 f(y + \theta_0) dy \\ &= \int_0^{\infty} y^2 f(\theta_0 - y) dy + \int_0^{\infty} y^2 f(y + \theta_0) dy\end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se obtuvo a través del cambio de variable  $z = -y$ , y

para tercera igualdad se cambió la variable de integración  $z$  por  $y$ . Note ahora que

$y^2 = \int_0^y 2w dw$ , de manera que

$$\begin{aligned}\text{Var}[Y] &= \int_0^{\infty} y^2 f(\theta_0 - y) dy + \int_0^{\infty} y^2 f(y + \theta_0) dy \\ &= \int_0^{\infty} y^2 [f(\theta_0 - y) + f(y + \theta_0)] dy \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^y 2w dw [f(\theta_0 - y) + f(y + \theta_0)] dy \\ &= \int \int_{0 < w < y} 2w [f(\theta_0 - y) + f(y + \theta_0)] dw dy.\end{aligned}$$

A continuación desarrolle la última integral doble efectuando primero la integración respecto a  $y$ , obteniendo

$$\begin{aligned}\text{Var}[Y] &= \int \int_{0 < w < y} 2w [f(\theta_0 - y) + f(y + \theta_0)] dy dw \\ &= \int_0^{\infty} 2w \left[ \int_w^{\infty} [f(\theta_0 - y) + f(y + \theta_0)] dy \right] dw \\ &= \int_0^{\infty} 2w G(w) dw\end{aligned}\tag{5.9}$$

donde

$$G(w) = \int_w^\infty [f(\theta_0 - y) + f(y + \theta_0)] dy, \quad w > 0. \quad (5.10)$$

En este punto es interesante observar que, debido a que  $f(\cdot)$  es la densidad de  $Y$ ,

$$P[|Y - \theta_0| > w] = G(w), \quad w > 0. \quad (5.11)$$

Además, a partir de (5.10) se desprende que  $G'(w) = -[f(\theta_0 - w) + f(w + \theta_0)]$  para  $w > 0$ , y entonces la hipótesis (5.8) implica que  $G'(w)$  es una función creciente en  $(0, \infty)$ , de donde se concluye que

$$G(w) \text{ es una función convexa en } (0, \infty); \quad (5.12)$$

vea la Observación 5.1. A continuación note que para cada número  $c > 0$ , (5.9) implica

$$\begin{aligned} \frac{\text{Var}[Y]}{c^2} &= \frac{1}{c} \int_0^\infty 2wG(w) dw \\ &\geq \frac{1}{c^2} \int_0^c 2wG(w) dw \end{aligned} \quad (5.13)$$

Considere ahora una variable aleatoria  $V$  cuya densidad está dada por

$$f_V(w) = \frac{2w}{c^2} I_{(0,c)}(w),$$

de manera que

$$E[V] = \int_0^c \frac{2w}{c^2} w dw = \frac{2c}{3}, \quad y \quad E[G(V)] = \int_0^c \frac{2w}{c^2} G(w) dw. \quad (5.14)$$

Combinando estas relaciones con (5.13) se obtiene  $\frac{\text{Var}[Y]}{c^2} \geq E[G(V)]$ , y entonces, la convexidad de  $G(\cdot)$  establecida en (5.12) y la desigualdad de Jensen en el Lema 5.1 implican que

$$\frac{\text{Var}[Y]}{c^2} \geq E[G(V)] \geq G(E[V]) = G\left(\frac{2c}{3}\right).$$

Combinando la última desigualdad con (5.11) se obtiene

$$\frac{\text{Var}[Y]}{c^2} \geq P\left[|Y - \theta_0| \geq \frac{2c}{3}\right],$$



y aplicando esta desigualdad con  $c = 3b/2$  se arriba a

$$\frac{\text{Var}[Y]}{2.25b^2} = \frac{\text{Var}[Y]}{(3b/2)^2} \geq P[|Y - \theta_0| \geq b],$$

estableciendo la conclusión deseada.  $\square$

## Inferencia Estadística y Gráficos de Control

En general, un método de inferencia es un procedimiento que permite tomar decisiones a partir de datos aleatorios. Los gráficos de control introducidos en la Sección 2 permiten al observador decidir entre las alternativas de que  $\theta$  conserva su valor original, o bien que el valor del parámetro se ha alterado. El objetivo de esta sección es relacionar la aplicación de un gráfico de control con las técnicas de inferencia más difundidas, esto es, la construcción de intervalos de confianza y de pruebas de hipótesis.

La discusión que sigue se desarrolla bajo las premisas del Teorema 3.1, es decir, se supone que las medias muestrales  $Y$  de los datos obtenidos al inspeccionar los grupos de artículos de tamaño  $n$ , tienen densidad dada por

$$f(x; \theta) = \frac{1}{\tau} g\left(\frac{x - \theta}{\tau}\right) \quad (6.1)$$

donde  $g(x)$  es una densidad unimodal en cero, y  $\tau > 0$  es un número positivo dado. Cuando  $\theta_0$  es el valor inicial del parámetro relevante, los límites de control están dados por

$$L = \theta_0 - k_{\alpha/2}\tau, \quad U = \theta_0 + k_{\alpha/2}\tau, \quad (6.2)$$

donde  $1 - \alpha$  es el nivel de inclusión, y  $k_{\alpha/2}$  es el percentil superior de la densidad  $g(\cdot)$  de orden  $\alpha/2$ ; vea la Definición 3.1. Bajo estas condiciones, el supervisor toma decisiones de acuerdo a la siguiente *regla de paro*:

**RP<sub>0</sub>** : (a) Cuando la  $i$ -ésima media muestral satisface  $Y_i \in [L, U]$ , entonces el parámetro de interés  $\theta$  conserva su valor inicial  $\theta_0$  y el proceso de producción no se revisa;

(b) Cuando  $Y_i \notin [L, U]$  el ingeniero de control declara que el parámetro de interés ya no conserva su valor inicial y el proceso productivo debe revisarse para determinar las causas de dicha alteración.

Para relacionar esta regla de actuación con otros métodos de inferencia, considere el problema de construir un intervalo de confianza para  $\theta$ . Con esta finalidad, note que a partir de la expresión (6.1) para la densidad de una media muestral  $Y$  se obtiene, vía la fórmula del cambio de variable, que

$$\frac{Y - \theta}{\tau} \text{ tiene densidad } g(x),$$

i.e.,  $\frac{Y - \theta}{\tau}$  es una cantidad pivote (Mood *et. al.*, 1985). Por lo tanto,

$$P_{\theta} \left[ -k_{\alpha/2} < \frac{Y - \theta}{\tau} < k_{\alpha/2} \right] = \int_{-k_{\alpha/2}}^{k_{\alpha/2}} g(x) = 1 - \alpha;$$

Puesto que  $-k_{\alpha/2} < (Y - \theta)/\tau < k_{\alpha/2}$  equivale a  $Y - k_{\alpha/2}\tau < \theta < Y + k_{\alpha/2}\tau$  se obtiene que

$$P_{\theta} [Y - k_{\alpha/2}\tau < \theta < Y + k_{\alpha/2}\tau] = 1 - \alpha, \quad \text{para todo } \theta$$

de manera que

$$Y - k_{\alpha/2}\tau < \theta < Y + k_{\alpha/2}\tau \tag{6.3}$$

es un intervalo de confianza para  $\theta$  con nivel  $1 - \alpha$ . Es claro que este intervalo consiste de todos los puntos cuya distancia a la media observada  $Y$  no excede a  $\tau k_{\alpha/2}$ . Utilizando este hecho la regla de actuación del supervisor puede ser interpretada de la siguiente forma: Note que la inclusión  $Y \in [L, U] = [\theta_0 - k_{\alpha/2}\tau, \theta_0 + k_{\alpha/2}\tau]$  equivale a  $|Y - \theta_0| \leq k_{\alpha/2}\tau$ , de manera que

el supervisor declara que el valor actual de  $\theta$  coincide con el valor original  $\theta_0$ , y consecuentemente **no** revisa el proceso productivo, cuando la distancia de  $\theta_0$  a  $Y$  no excede a  $k_{\alpha/2}\tau$ , esto es, cuando  $\theta_0$  pertenece al intervalo de confianza para  $\theta$  dado en (6.3).

Por otro lado,  $Y \notin [L, U] = [\theta_0 - k_{\alpha/2}\tau, \theta_0 + k_{\alpha/2}\tau]$  es equivalente a  $|Y - \theta_0| > k_{\alpha/2}\tau$ , desigualdad que ocurre sólo en el caso de que  $\theta_0$  no esté contenido en el intervalo de confianza (6.3). Por lo tanto,

el supervisor declara que el valor actual de  $\theta$  **no** coincide con el valor original  $\theta_0$ , y consecuentemente revisa el proceso productivo, cuando  $\theta_0$  **no** pertenece al intervalo de confianza para  $\theta$  dado en (6.3).

Estas observaciones ponen de manifiesto que la regla de decisión adoptada por el supervisor en base a un gráfico de control puede expresarse equivalentemente usando la técnica de intervalos de confianza. Sin embargo, es oportuno mencionar que un gráfico de control es un medio visual simple que permite a todos los involucrados en el proceso productivo, aún a aquellos sin conocimientos técnicos, involucrarse en la evolución de la característica de interés; la simplicidad es uno de los atributos que han contribuido a la amplia utilización de los gráficos de control.

**Observación 6.1.** Considere la hipótesis  $\mathcal{H}_0: \theta = \theta_0$ , y su alternativa  $\mathcal{H}_1: \theta \neq \theta_0$ .

En estas condiciones, se sabe que no existe en general, una prueba más potente que permita discriminar entre  $\mathcal{H}_0$  y  $\mathcal{H}_1$ . Sin embargo, entre las pruebas cuya función crítica depende sólo de  $|Y - \theta_0|$ , la siguiente es uniformemente más potente con nivel de significancia  $\alpha$  (Lehman, 1991):

$$\text{Rechace } \mathcal{H}_0 \text{ si y sólo si } |Y - \theta_0| > k_{\alpha/2}\tau. \quad (6.4)$$

Puesto que la desigualdad  $|Y - \theta_0| > k_{\alpha/2}\tau$  ocurre exactamente cuando  $Y \notin [L, U] = [\theta_0 - k_{\alpha/2}\tau, \theta_0 + k_{\alpha/2}\tau]$ , la regla de actuación  $\mathbf{RP}_0$  descrita anteriormente puede interpretarse de la siguiente forma: Cada ocasión que una media muestral  $Y$  es observada, el supervisor que toma la decisión de declarar que  $\theta = \theta_0$  o  $\theta \neq \theta_0$ , está probando la hipótesis  $\mathcal{H}_0$  de acuerdo al procedimiento descrito en (6.4).

La discusión de esta sección pone de manifiesto que la utilización de un gráfico de control es una implementación visual de un procedimiento de prueba de hipótesis o de intervalos de confianza.

## Caracterización Alternativa de los Límites de Control

El propósito de esta sección es proporcionar una caracterización alternativa de los límites de control que se obtuvieron en el Teorema 3.1. Como ya se ha señalado, los límites de control con un nivel de inclusión dado pueden seleccionarse en infinidad de formas; sin embargo, la especificación de los mismos dada en la ecuación (3.5) es la única que satisface el siguiente requerimiento: la probabilidad de revisar el proceso productivo se minimiza cuando el parámetro de interés asume su valor original—vea el Teorema 3.1, particularmente la expresión (3.6). En esta sección se estudia la amplitud de la zona (de aceptación)  $\mathcal{A}$ , buscando seleccionar los límites de control  $L$  y  $U$  de manera que su separación sea mínima. El resultado que en esta dirección se obtiene está contenido en el Teorema 7.1 enunciado a continuación, el cual establece que, cuando la distribución de las medias muestrales es unimodal, los límites de control en (3.5) son aquellos que *minimizan* la amplitud de la zona de aceptación  $\mathcal{A}$ .

**Teorema 7.1.** Suponga que la densidad de las medias  $Y_i$  es de la forma

$$f(x; \theta) = \frac{1}{\tau} g\left(\frac{x - \theta}{\tau}\right),$$

donde  $g(x)$  es una densidad unimodal en cero, y  $\tau > 0$  es un número positivo dado.

Si  $u$  y  $\ell$  son dos números tales que  $u > \ell$  y

$$P_{\theta_0}[Y_i \in [u, \ell]] = 1 - \alpha, \tag{7.1}$$

entonces,

$$u - \ell \geq U - L,$$

donde  $U$  y  $L$  están dados en (3.5)

Note que la igualdad (7.1) significa que  $\ell$  y  $u$  podrían ser utilizados para construir un gráfico de control para el valor  $\theta_0$  del parámetro de interés con nivel de inclusión  $1 - \alpha$ . En ese caso la amplitud de la zona (de aceptación)  $\mathcal{A}$  sería  $u - \ell$ , la cual, de acuerdo al Teorema 7.1, sería mayor o igual a  $U - L$ . Luego, la conclusión del teorema es que la amplitud de la región  $\mathcal{A}$  se minimiza seleccionado los límites de control como en (3.5).

**Demostración del Teorema 7.1.** Como punto de partida, considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar: } & u - \ell \\ \text{Sujeto a: } & P_{\theta_0}[Y_i \in [u, \ell]] = 1 - \alpha. \end{aligned} \tag{7.2}$$

para establecer el teorema es claramente suficiente demostrar que la pareja  $(U, L)$  es una solución a este problema, conclusión a la que se arribará usando la técnica de multiplicadores de Lagrange presentada en (Fulks, 1981) y (Graybill, 1985). De acuerdo a este método, las soluciones de (7.2) se determinan resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u - \ell)}{\partial u} &= \lambda \frac{\partial P_{\theta_0}[Y_i \in [u, \ell]]}{\partial u} \\ \frac{\partial(u - \ell)}{\partial \ell} &= \lambda \frac{\partial P_{\theta_0}[Y_i \in [u, \ell]]}{\partial \ell} \end{aligned} \tag{7.3}$$

$$P_{\theta_0}[Y_i \in [u, \ell]] = 1 - \alpha,$$

donde  $\lambda \in \mathbb{R}$  es el multiplicador de Lagrange.

Para resolver este sistema de ecuaciones es necesario encontrar las derivadas parciales a la derecha de (7.3). Con este fin note que

$$P_{\theta_0}[Y_i \in [u, \ell]] = \int_{\ell}^u f(x; \theta_0) dx = \int_{\ell}^u \frac{1}{\tau} g\left(\frac{x - \theta_0}{\tau}\right) dx,$$

de tal forma que

$$\frac{\partial P_{\theta_0}[Y_i \in [u, \ell]]}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \int_{\ell}^u \frac{1}{\tau} g\left(\frac{x - \theta_0}{\tau}\right) dx = \frac{1}{\tau} g\left(\frac{u - \theta_0}{\tau}\right),$$

y

$$\frac{\partial P_{\theta_0}[Y_i \in [u, \ell]]}{\partial \ell} = \frac{\partial}{\partial \ell} \int_{\ell}^u \frac{1}{\tau} g\left(\frac{x - \theta_0}{\tau}\right) dx = -\frac{1}{\tau} g\left(\frac{\ell - \theta_0}{\tau}\right).$$

Luego, el sistema (7.3) equivale a

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\lambda}{\tau} g\left(\frac{u - \theta_0}{\tau}\right) \\ -1 &= -\frac{\lambda}{\tau} g\left(\frac{\ell - \theta_0}{\tau}\right) \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$\int_{\ell}^u \frac{1}{\tau} g\left(\frac{x - \theta_0}{\tau}\right) dx = 1 - \alpha$$

A continuación se mostrará que una solución de (7.4) necesariamente satisface

$$\frac{u + \ell}{2} = \theta_0. \quad (7.4)$$

Para demostrar esta afirmación, note que  $\lambda \neq 0$  pues de otra forma la igualdad  $1 = (\lambda/\tau)g((u - \theta_0)/\tau)$  no puede ocurrir, y entonces las dos primera ecuaciones en (7.4) implican que

$$g\left(\frac{u - \theta_0}{\tau}\right) = g\left(\frac{\ell - \theta_0}{\tau}\right). \quad (7.5)$$

Considere ahora los siguientes casos:

**Caso 1:**  $u - \theta_0$  y  $\ell - \theta_0$  tienen el mismo signo. Para fijar ideas, suponga que ambos números son positivos. En esta situación, la monotonicidad de  $g(\cdot)$  en el eje positivo y (7.5) implican que  $(u - \theta_0)/\tau = (\ell - \theta_0)/\tau$ , de donde se desprende que  $u = \ell$ , igualdad que es incompatible con la tercera igualdad en (7.4). Esta contradicción muestra que no es posible que  $u - \theta_0$  y  $\ell - \theta_0$  tengan el mismo signo.

**Caso 2:**  $u - \theta_0$  y  $\ell - \theta_0$  tienen signo contrario. En esta situación, debe tenerse que  $u - \theta_0 > 0$  y  $\ell - \theta_0 < 0$ , pues  $u > \ell$ ; luego,  $\ell - \theta_0 = -|\ell - \theta_0|$  y la simetría de  $g(x)$  implica que

$$g\left(\frac{\ell - \theta_0}{\tau}\right) = g\left(\frac{-|\ell - \theta_0|}{\tau}\right) = g\left(\frac{|\ell - \theta_0|}{\tau}\right)$$

igualdad que combinada con (7.5) conduce a

$$g\left(\frac{u - \theta_0}{\tau}\right) = g\left(\frac{|\ell - \theta_0|}{\tau}\right).$$

La monotonicidad estricta de  $g(\cdot)$  en el semieje positivo tiene como consecuencia que  $g$  sea 1-1 en  $(0, \infty)$ , de manera que a partir de la ecuación precedente se desprende que

$$\frac{u - \theta_0}{\tau} = \frac{|\ell - \theta_0|}{\tau} = -\frac{\ell - \theta_0}{\tau},$$

de donde se concluye que  $u - \theta_0 = -(\ell - \theta_0)$ , y entonces (7.4) se sigue de inmediato. Después de demostrar que  $\theta_0$  es el punto medio del intervalo  $[u, \ell]$ , note que a partir de (7.4) se desprende que  $u$  y  $\ell$  son de la forma

$$u = \theta_0 + k\tau, \quad \ell = \theta_0 - k\tau, \quad (7.6)$$

de manera que la tercera igualdad en (7.4) puede escribirse como

$$\int_{\theta_0 - k\tau}^{\theta_0 + k\tau} \frac{1}{\tau} g\left(\frac{x - \theta_0}{\tau}\right) dx = 1 - \alpha$$

y aplicando el cambio de variable  $z = (x - \theta_0)/\tau$  se obtiene

$$\int_{-k}^k g(x) dx = 1 - \alpha$$

ecuación que equivale a

$$\int_{-\infty}^{-k} g(x) dx + \int_k^{\infty} g(x) dx = \alpha.$$

Apelando de nueva cuenta a la simetría de la densidad  $g(\cdot)$ , se concluye que

$$2 \int_k^{\infty} g(x) dx = \alpha, \quad \text{y entonces} \quad \int_k^{\infty} g(x) dx = \frac{\alpha}{2};$$

comparando que esta igualdad con (3.4) se concluye que  $k$  es el percentil superior de orden  $\alpha/2$  de la densidad  $g$ , i.e.,  $k = k_{\alpha/2}$ , de manera que (7.6) implica

$$u = \theta_0 + k_{\alpha/2}\tau, \quad \ell = \theta_0 - k_{\alpha/2}\tau,$$

y entonces los valores de  $u$  y  $\ell$  que resuelven el problema (7.2) son precisamente  $U$  y  $L$  dados en (3.5). □

## Conclusión

En este capítulo se ha presentado la idea básica en el área de control estadístico de calidad, a saber, la noción de gráfico de control. Además de describir el procedimiento de construcción, se demostró en la Sección 3 que bajo el supuesto de unimodalidad de la densidad de las medias muestrales, los límites de control en el procedimiento básico deben seleccionarse de manera que el centro del intervalo  $[L, U]$  sea el valor inicial del parámetro de interés; al proceder de esta forma se garantiza que la probabilidad de que el proceso sea revisado sin haber razón para ello se minimice cuando el parámetro no ha cambiado su valor, mientras que en la Sección 7 se probó que dicha elección de los límites de control también logra que la amplitud de la zona de aceptación del gráfico sea lo menor posible, mientras que la discusión presentada en la Sección 6 ubica a los gráficos de control como un medio visual que permite probar la hipótesis de que el parámetro de interés no ha cambiado al transcurrir el proceso de producción. Por otro lado, este capítulo también consideró el problema de obtener cotas no paramétricas para la probabilidad de que un punto muestral se ubique fuera de los límites de control a pesar de que el parámetro de interés conserve su valor original; la principal contribución en esta dirección se ubica en el Teorema 5.2, en el cual se establece la desigualdad de Camp–Meidel bajo condiciones sobre la densidad subyacente que son más débiles que la unimodalidad.



# GRÁFICOS DE CONTROL EN LAS APLICACIONES

En este capítulo se considera la implementación de la idea de gráfico de control en una situación práctica. Entre los temas que se abordan destaca la estimación óptima de los límites de control para la media del rasgo relevante, y la forma en que dichos límites se aproximan utilizando rangos de muestras piloto. Además, se estudia el efecto que el uso de estimaciones tiene sobre la probabilidad real de declarar erróneamente que el proceso se encuentra fuera de control, y se relacionan las especificaciones sobre el producto con los límites de control a través de la noción de capacidad del proceso.

## Introducción

El tema de este capítulo es la implementación práctica de los gráficos de control. Debido a que los valores iniciales de la media y desviación estándar del rasgo de interés no se conocen, la exposición incluye un tratamiento riguroso del problema de estimación óptima de estos parámetros, así como de las consecuencias que el uso de estimaciones tiene sobre la probabilidad de rechazar incorrectamente la hipótesis de control estadístico, prestando especial atención al problema de determinar el efecto que el proceso de estimación tiene sobre la probabilidad de un error tipo I. La presentación incluye una presentación del método clásico de estimación en base a rangos, el cual, debido a su sencillez, es ampliamente utilizado.

La exposición ha sido organizada de la siguiente manera: En la Sección 1 se establece el marco básico de trabajo, puntualizando la necesidad de determinar

los límites de control utilizando el valor original de la desviación estándar del rasgo relevante, y abandonando la hipótesis de que dicho parámetro es constante. La Sección 3 trata sobre el problema de estimación óptima de los límites de control para la media, mientras que en la Sección 4 se estudia el problema de estimar la probabilidad real de un rechazo incorrecto del la hipótesis de control estadístico. Las Secciones 5 y 6 presentan el método clásico de estimación de límites de control con base en rangos de muestras piloto, y en la Sección 7 se introduce la idea de capacidad del proceso como un vehículo para relacionar las especificaciones sobre el producto con la idea de control estadístico. Finalmente, el capítulo concluye con algunos comentarios breves en la Sección 8.

## Límites de Control Para la Media

Con el propósito de monitorear los rasgos relevantes de los productos finales, en la línea de producción se implementa el siguiente esquema de muestreo:

Conforme el proceso productivo transcurre, se extraen grupos de  $n$  artículos finales; el valor de  $n$  es hasta cierto punto arbitrario, pero es costumbre seleccionar un valor ‘pequeño’, por ejemplo  $n = 4$  o  $n = 5$ , especialmente en el caso en que las mediciones realizadas involucren un proceso destructivo. En cada uno de los productos elegidos se mide el valor *real* de la característica de interés, y posteriormente se calcula la media muestral de los datos obtenidos.

En el desarrollo del capítulo, se supone que las  $n$  observaciones que se obtienen al revisar cada grupo son variables aleatorias  $X_1, X_2, \dots, X_n$  con distribución  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , de manera que  $\mu$  es el valor esperado del rasgo relevante, y  $\sigma$  es su desviación estándar. La media de estas observaciones, denotada por  $Y$ , satisface la relación

$$Y = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right). \quad (2.1)$$

Al inspeccionar los productos finales a intervalos regulares, por ejemplo cada hora o al inicio de cada turno, se obtienen cantidades aleatorias  $Y_1, Y_2, \dots$ , donde  $Y_i$  es el promedio de los datos obtenidos del  $i$ -ésimo grupo, y se tiene el propósito de utilizar la sucesión observada de medias muestrales para decidir si su distribución no se altera al transcurrir el tiempo, propiedad que de acuerdo a (2.1) es equivalente a que  $\mu$  y  $\sigma$  conserven su valor original; como fue señalado en el Capítulo 2, la técnica de los gráficos de control ha sido especialmente diseñada para alcanzar este objetivo. En esta sección se consideran aspectos prácticos de la construcción de un gráfico para el parámetro de interés  $\theta = \mu$ , los cuales están relacionados con la determinación de los límites de control  $L$  y  $U$ .

Como punto de partida, observe que la ecuación (2.1) implica que la densidad de cada media muestral  $Y$  es  $\frac{1}{\tau}g\left(\frac{x - \mu}{\tau}\right)$ , donde

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}, \quad \text{y} \quad \tau = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (2.2)$$

Luego, la densidad  $g(x)$  es normal estándar, la cual tiene la propiedad de ser unimodal en cero y entonces, aplicando el Teorema 3.1, los límites de control son  $\mu_0 \pm z_{\alpha/2}\tau$ , donde  $\mu_0$  es el valor inicial de  $\mu$ , y  $z_{\alpha/2}$  es el percentil superior de orden  $\alpha/2$  de la distribución normal estándar. En este punto es conveniente notar que  $\tau$ , la desviación estándar de una media muestral, puede cambiar conforme se desarrolla la producción. En la construcción general del Capítulo 2 se supuso que  $\tau$  era constante, pero ahora esa hipótesis debe abandonarse. En efecto, el ingeniero de control desea saber si la pareja  $(\mu, \sigma)$  no altera su valor al transcurrir el tiempo, y ya que  $\tau$  es proporcional a  $\sigma$ , no se puede suponer que  $\tau$  es constante. Por esta razón, los límites deben construirse usando el valor inicial de  $\tau$ , el cual se denotará por  $\tau_0$ ; note que

$$\tau_0 = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \quad (2.3)$$

donde  $\sigma_0$  es el valor original de  $\sigma$ . Con esta notación se tiene que los límites de

control para la media  $\mu$  asociados al valor original  $\mu_0$  están dados por

$$L = \mu_0 - z_{\alpha/2}\tau_0, \quad \text{y} \quad U = \mu_0 + z_{\alpha/2}\tau_0. \quad (2.4)$$

Es importante notar que  $\mu_0$  y  $\sigma_0$  reflejan *características propias del proceso de producción en el momento inicial*, y que la intención principal es utilizar el gráfico de control con límites dados en (2.4) para detectar, conforme el proceso transcurre, desviaciones de la media y la desviación estándar de la característica de interés respecto a sus valores iniciales. Debido a que en las aplicaciones no se conocen los valores de  $\mu_0$  y  $\sigma_0$ , estas cantidades deben estimarse, aspecto que se considera a continuación.

## Estimación Óptima de los Límites de Control

Para estimar los valores originales de la media y la desviación estándar, es necesario disponer de mediciones realizadas sobre productos fabricados mientras el proceso mantiene sus condiciones iniciales. Con esta finalidad, se seleccionan  $K$  grupos que consisten de  $n$  artículos, los cuales se consideran como *las muestras piloto* a partir de las cuales se estimarán  $\mu_0$  y  $\sigma_0$ . Para  $i = 1, 2, \dots, K$  y  $j = 1, 2, \dots, n$ , denote mediante  $X_j^i$  al valor del rasgo de interés obtenido a partir de la  $j$ -ésima observación en el  $i$ -ésimo grupo. En este caso, se tiene que

$$X_j^i \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2) \quad \text{para todo } i, j. \quad (3.1)$$

Bajo la condición natural de independencia de las variables  $X_j^i$ , los estimadores insesgados de varianza uniformemente mínima para  $\mu_0$  y  $\sigma_0^2$  son

$$\hat{\mu}_0 = \frac{\sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^n X_j^i}{nK}, \quad \text{y} \quad s_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^n (X_j^i - \hat{\mu}_0)^2}{nK - 1}; \quad (3.2)$$

vea, por ejemplo, (Mood *et. al*, 1985), (Dudewicz y Mishra, 1988), o (Graybill, 1985). Sin embargo, las igualdades (2.4) para los límites de control involucran a  $\tau_0 = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$ , así que es necesario determinar un estimador insesgado de este

parámetro. Para alcanzar este objetivo es suficiente encontrar tal estimador para  $\hat{\sigma}_0$  de  $\sigma_0$ , y como primer paso en esta dirección note que, debido a la convexidad estricta de la función  $x \mapsto x^2$ , la desigualdad de Jensen establecida en el Lema 2.5.1 implica

$$\sigma_0^2 = E[S_0^2] > (E[s_0])^2,$$

y entonces  $\sigma_0 > E[s_0]$ , de tal forma que un estimador insesgado de  $\sigma_0$  no puede obtenerse simplemente tomando la raíz cuadrada de  $s_0^2$ . El siguiente teorema muestra que multiplicando a  $s_0$  por una constante adecuada es posible obtener un estimador insesgado de  $\sigma_0$ .

**Teorema 3.1** (i) Suponga que  $W$  es una variable aleatoria con distribución ji-cuadrada con  $m$  grados de libertad, i.e.,  $W \sim \chi_m^2$ . En este caso,

$$E[\sqrt{W}] = \frac{2^{1/2} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}.$$

(ii) Para cada entero positivo  $m$  defina

$$J_m := \left( \frac{2^{1/2} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{m^{1/2} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \right)^{-1}. \quad (3.3)$$

Con esta notación se tiene que

$$E[s_0] = \frac{\sigma_0}{J_{nK-1}}.$$

Consecuentemente,

(iii) Los estimadores insesgados de varianza uniformemente mínima de  $\sigma_0$  y  $\tau_0$  son

$$\hat{\sigma}_0 = J_{nK-1} s_0, \quad \text{y} \quad \hat{\tau}_0 = \frac{J_{nK-1}}{\sqrt{n}} s_0 = \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}}. \quad (3.4)$$

**Demostración.** (i) Suponga que  $W \sim \chi_m^2$ , de tal forma que la densidad de  $W$  es

$$f_W(w) = \frac{1}{2^{m/2} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} w^{m/2-1} e^{-w/2} I_{(0,\infty)}(w).$$

En este caso, el valor esperado de  $\sqrt{W}$  se calcula como sigue:

$$\begin{aligned}
 E[\sqrt{W}] &= \int_{\mathbb{R}} \sqrt{w} f_W(w) dw \\
 &= \int_0^{\infty} \sqrt{w} \frac{1}{2^{m/2} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} w^{m/2-1} e^{-w/2} dw \\
 &= \frac{1}{2^{m/2} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_0^{\infty} w^{1/2} w^{m/2-1} e^{-w/2} dw \\
 &= \frac{1}{2^{m/2} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_0^{\infty} w^{(m+1)/2-1} e^{-w/2} dw \\
 &= \frac{2^{(m+1)/2} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{2^{m/2} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_0^{\infty} \frac{1}{2^{(m+1)/2} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} w^{(m+1)/2-1} e^{-w/2} dw \\
 &= \frac{2^{1/2} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_0^{\infty} \frac{1}{2^{(m+1)/2} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} w^{(m+1)/2-1} e^{-w/2} dw
 \end{aligned}$$

y utilizando que la función dentro de la última integral es la densidad  $\chi_{m+1}^2$ , se desprende que  $E[\sqrt{W}] = \frac{2^{1/2} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}$ , estableciendo la conclusión deseada.

(ii) Observe que  $W = \frac{(nK-1)s_0^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_{nK-1}^2$  (Graybill, 1985; Anderson, 1989).

Aplicando el resultado obtenido en la parte (i) con

$$m = nK - 1$$

se desprende la igualdad

$$E\left[\sqrt{\frac{(nK-1)s_0^2}{\sigma_0^2}}\right] = \frac{2^{1/2} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)},$$

y entonces

$$E[s_0] = \frac{2^{1/2} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{m^{1/2} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \sigma_0 = \frac{\sigma_0}{J_m} \quad \text{con } m = nK - 1.$$

(iii) Como consecuencia de la parte (ii) se tiene que

$$E[\hat{\sigma}_0] = E[J_{nK-1} s_0] = J_{nK-1} E[s_0] = J_{nK-1} \frac{\sigma_0}{J_{nK-1}} = \sigma_0,$$

y

$$E[\hat{\tau}_0] = E\left[\frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}}\right] = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} = \tau_0,$$

lo cual muestra que  $\hat{\sigma}_0$  y  $\hat{\tau}_0$  son estimadores insesgados de  $\sigma_0$  y  $\tau_0$ , respectivamente. Para concluir, note que la propiedad distribucional en (3.1) conjuntamente con la independencia de las variables  $X_j^i$  implican que el estadístico  $(\hat{\mu}_0, s_0^2)$  es suficiente y completo; puesto que  $\hat{\sigma}_0$  y  $\hat{\tau}_0$  son funciones de  $s_0^2$ , se concluye que entre todos los estimadores insesgados de  $\sigma_0$  y  $\tau_0$ , los estadísticos  $\hat{\sigma}_0$  y  $\hat{\tau}_0$  tienen varianza uniformemente mínima (Mood *et. al.* , 1985; Dudewicz y Mishra, 1988).  $\square$

Utilizando el teorema precedente, se obtiene de inmediato el siguiente resultado sobre la estimación óptima de los límites de control en (2.4).

**Corolario 3.1.** Los estimadores insesgados con varianza uniformemente mínima para los límites de control  $L$  y  $U$  en (2.4) están dados por

$$\hat{L} = \hat{\mu}_0 - z_{\alpha/2}\hat{\tau}_0, \quad y \quad \hat{U} = \hat{\mu}_0 + z_{\alpha/2}\hat{\tau}_0,$$

donde  $\hat{\mu}_0$  y  $\hat{\tau}_0$  están dados en (3.2) y (3.4), respectivamente.

Para construir el gráfico de control asociado al valor inicial de la media  $\mu$  se trazan líneas horizontales a través de los puntos  $(0, \hat{L})$  y  $(0, \hat{U})$ . Desde luego, lo ideal sería construir el gráfico utilizando los valores verdaderos de  $L$  y  $U$ , pero esto no es posible porque no se conocen los valores iniciales de la media y la desviación estándar del rasgo de interés. Sin embargo, al proceder de esta manera algo importante se altera, a saber, la probabilidad de rechazar incorrectamente la hipótesis de que el proceso se encuentra bajo control estadístico. Para entender esta idea, suponga que ya se han trazado las líneas de control utilizando  $\hat{L}$  y  $\hat{U}$ , y que el proceso productivo continúa, de manera que después del momento inicial se seleccionan  $n$  artículos, se determina la característica de interés en cada producto y se calcula la media  $Y$  de las  $n$  observaciones obtenidas. Cuando los parámetros  $\mu_0$  y  $\sigma_0$  no han alterado su valor, se tiene que  $P[Y \notin [L, U]] = \alpha$ , de manera que la probabilidad *nominal* de declarar incorrectamente que el proceso productivo se encuentra fuera de control es  $\alpha$ ; sin embargo, como las líneas de control se trazan a través de  $\hat{L}$  y  $\hat{U}$ , la decisión de declarar al proceso como fuera de control se

toma cuando  $Y \notin [\hat{L}, \hat{U}]$ , cuya probabilidad difiere, en general, del valor  $\alpha$ . Una pregunta interesante e importante consiste en determinar el valor de  $P[Y \notin [\hat{L}, \hat{U}]]$ , problema que se aborda en la siguiente sección.

## La Probabilidad de un Punto Fuera de Control

Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  los valores de la característica de interés que fueron observados en  $n$  objetos seleccionados después de trazar las líneas de control, de manera que las variables  $X_i$  son independientes de las muestras piloto. Suponga que  $X_1, X_2, \dots, X_n$  conforman una muestra de la distribución normal y que los valores de  $\mu$  y  $\sigma$  no se han alterado, esto es, las  $X_i$  son independientes e idénticamente distribuidas con distribución común  $\mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2)$ . En este caso, la media muestral  $Y = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$  satisface

$$Y \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2) \sim \mathcal{N}\left(\mu_0, \frac{\sigma_0^2}{n}\right) = \mathcal{N}(\mu_0, \tau_0^2); \quad (4.1)$$

vea (2.3). El proceso será (incorrectamente) declarado fuera de control cuando  $Y \notin [\hat{L}, \hat{U}]$ , y el propósito de esta sección es estimar la probabilidad de dicho evento. Con este objetivo, observe primero que

$$\begin{aligned} Y \notin [\hat{L}, \hat{U}] &\iff Y \notin [\hat{\mu}_0 - \hat{\tau}_0 z_{\alpha/2}, \hat{\mu}_0 + \hat{\tau}_0 z_{\alpha/2}] \\ &\iff \frac{|Y - \hat{\mu}_0|}{\hat{\tau}_0} > z_{\alpha/2} \end{aligned} \quad (4.2)$$

En el siguiente resultado se determina la distribución del estadístico  $(Y - \hat{\mu}_0)/\hat{\tau}_0$ .

**Teorema 4.1.** (i) Bajo la condición de que  $\mu = \mu_0$  y  $\sigma^2 = \sigma_0^2$ , la distribución del cociente  $\frac{Y - \hat{\mu}_0}{\hat{\tau}_0}$  está determinada por

$$J_{nK-1} \left(1 + \frac{1}{K}\right)^{-1} \frac{Y - \hat{\mu}_0}{\hat{\tau}_0} \sim t_{nK-1},$$

donde  $t_r$  denota la distribución  $t$  con  $r$  grados de libertad, y  $J_{nK-1}$  es como en (3.3). Consecuentemente,



(ii) La probabilidad de declarar incorrectamente que el proceso no está operando bajo control estadístico es

$$P \left[ \frac{|Y - \hat{\mu}_0|}{\hat{\tau}_0} > z_{\alpha/2} \right] = P \left[ |T| > J_{nK-1} \left( 1 + \frac{1}{K} \right)^{-1} z_{\alpha/2} \right],$$

donde  $T \sim t_{nK-1}$ .

**Demostración.** (i) Combinando (3.1) y (3.2) se obtiene que

$$\hat{\mu}_0 \sim \mathcal{N} \left( \mu_0, \frac{\sigma_0^2}{nK} \right) = \mathcal{N} \left( \mu_0, \frac{\tau_0^2}{K} \right);$$

vea (2.3). Utilizando la independencia de  $Y$  y las muestras piloto, esta relación y (4.1) implican que  $Y - \hat{\mu}_0 \sim \mathcal{N} \left( 0, \tau_0^2 \left( 1 + \frac{1}{K} \right) \right)$ , y entonces

$$\left( 1 + \frac{1}{K} \right)^{-1} \frac{Y - \hat{\mu}_0}{\tau_0} \sim \mathcal{N}(0, 1). \quad (4.3)$$

Por otro lado, observe que la independencia de  $Y$  y las muestras piloto, implica que  $Y$  es independiente de  $(\hat{\mu}_0, s_0^2)$ ; puesto que la varianza y la media muestrales obtenidas de una muestra de la distribución normal son independientes, se desprende que  $Y - \hat{\mu}_0$  es independiente de  $s_0^2$ ; recordando que  $\frac{(nK-1)s_0^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_{nK-1}^2$ ,

(4.3) implica que

$$\left( 1 + \frac{1}{K} \right)^{-1} \frac{(Y - \hat{\mu}_0)\sigma_0}{s_0\tau_0} = \left( 1 + \frac{1}{K} \right)^{-1} \frac{(Y - \hat{\mu}_0)/\tau_0}{\sqrt{\frac{(nK-1)s_0^2/\sigma_0^2}{nK-1}}} \sim t_{nK-1};$$

utilizando (2.3) y (3.4) se desprende que  $\frac{\sigma_0}{s_0\tau_0} = \frac{\sqrt{n}}{s_0} = \frac{\sqrt{n}J_{nK-1}}{J_{nK-1}s_0} = \frac{J_{nK-1}}{\hat{\tau}_0}$ , y entonces la última relación desplegada equivale a

$$J_{nK-1} \left( 1 + \frac{1}{K} \right)^{-1} \frac{Y - \hat{\mu}_0}{\hat{\tau}_0} \sim t_{nK-1}.$$

(ii) El proceso se declara fuera de control cuando  $Y \notin [\hat{L}, \hat{U}]$ , lo cual equivale a  $\frac{|Y - \hat{\mu}_0|}{\hat{\tau}_0} > z_{\alpha/2}$  (vea (4.2)). Luego,

$$\begin{aligned} P[Y \notin [\hat{L}, \hat{U}]] &= P \left[ \frac{|Y - \hat{\mu}_0|}{\hat{\tau}_0} > z_{\alpha/2} \right] \\ &= P \left[ J_{nK-1} \left( 1 + \frac{1}{K} \right)^{-1} \frac{|Y - \hat{\mu}_0|}{\hat{\tau}_0} > J_{nK-1} \left( 1 + \frac{1}{K} \right)^{-1} z_{\alpha/2} \right] \end{aligned}$$

y definiendo

$$T = J_{nK-1} \left(1 + \frac{1}{K}\right)^{-1} \frac{Y - \hat{\mu}_0}{\hat{\tau}_0}$$

se tiene que

$$P[Y \notin [\hat{L}, \hat{U}]] = P \left[ |T| > J_{nK-1} \left(1 + \frac{1}{K}\right)^{-1} z_{\alpha/2} \right]$$

donde, debido a la parte (i),  $T \sim t_{NK-1}$ .  $\square$

El Teorema 4.1 puede utilizarse para estimar la probabilidad de declarar incorrectamente que el proceso se encuentra fuera de control. Primero recuerde que  $K$  es el número de muestras piloto, cada una de las cuales contiene  $n$  elementos. Usualmente  $n$  se toma como cuatro o cinco, y el valor de  $K$  es veinte. En este caso,  $nK - 1$  asume un valor de 79 cuando  $n = 4$  y  $K = 20$ , o de 99 cuando  $n = 5$  y  $K = 20$ . De esta forma, el número de grados de libertad de la distribución  $t$  en el Teorema 4.1(ii) es tal que la distribución de  $T$  es, prácticamente, normal estándar. En estas circunstancias,

$$P[Y \notin [\hat{L}, \hat{U}]] \approx P \left[ |Z| > J_{nK-1} \left(1 + \frac{1}{K}\right)^{-1} z_{\alpha/2} \right]$$

donde  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , y entonces

$$P[Y \notin [\hat{L}, \hat{U}]] \approx 2 \left[ 1 - \Phi \left( J_{nK-1} \left(1 + \frac{1}{K}\right)^{-1} z_{\alpha/2} \right) \right]. \quad (4.4)$$

Para estimar el lado derecho de esta aproximación, se utilizará el siguiente resultado auxiliar.

**Lemma 4.1.** Conforme  $m$  tiende a  $\infty$ ,  $J_m$  converge a 1.

Usando este resultado, es razonable sustituir  $J_{nK-1}$  en (4.4) por el número 1, para obtener

$$P[Y \notin [\hat{L}, \hat{U}]] \approx 2 \left[ 1 - \Phi \left( \left(1 + \frac{1}{K}\right)^{-1} z_{\alpha/2} \right) \right]. \quad (4.5)$$

Esta relación permite tener una idea de la probabilidad real de rechazar incorrectamente la hipótesis de control estadístico. Por ejemplo, suponga que  $\alpha = 0.0027$ , elección para la cual  $z_{\alpha/2} = 3$ . En este caso, (4.5) con  $K = 20$  produce

$$\begin{aligned} P[Y \notin [\hat{L}, \hat{U}]] &\approx 2 \left[ 1 - \Phi \left( \left( 1 + \frac{1}{20} \right)^{-1} 3 \right) \right] \\ &= 2 \left[ 1 - \Phi \left( \frac{60}{21} \right) \right] \\ &= 2(.0021135) \\ &= .00427 \end{aligned}$$

Note que la probabilidad de rechazo incorrecto de la hipótesis de control estadístico es 0.00427, la cual es 58 por ciento mayor que la probabilidad nominal 0.0027. En general, la probabilidad real de rechazo es mayor que la nominal, pero esto no ocasiona problema alguno, pues  $\alpha$  es del orden de diezmilésimos. Para concluir esta sección se demostrará la convergencia establecida en el Lemma 4.1.

**Demostración del Lema 4.1.** El argumento depende de la fórmula de Stirling; vea, por ejemplo, (Fulks, 1981; Anderson, 1989), o (Hildebrand, 1979). De acuerdo a este resultado

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(x+1)}{\sqrt{2\pi} x^{x+1/2} e^{-x}} = 1. \quad (4.6)$$

Utilizando esta convergencia con  $x = (m-1)/2$ , se obtiene

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi} \left(\frac{m-1}{2}\right)^{m/2} e^{-(m-1)/2}} = 1, \quad (4.7)$$

mientras que tomando  $x = (m-2)/2$  en (4.6) se desprende

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\sqrt{2\pi} \left(\frac{m-2}{2}\right)^{(m-1)/2} e^{-(m-2)/2}} = 1. \quad (4.8)$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 \lim_{m \rightarrow \infty} J_m &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{m}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \sqrt{\frac{2}{m}} \frac{\sqrt{2\pi} \left(\frac{m-1}{2}\right)^{m/2} e^{-(m-1)/2}}{\sqrt{2\pi} \left(\frac{m-2}{2}\right)^{(m-1)/2} e^{-(m-2)/2}} \right. \\
 &\quad \left. \times \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) / \sqrt{2\pi} \left(\frac{m-1}{2}\right)^{m/2} e^{-(m-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) / \sqrt{2\pi} \left(\frac{m-2}{2}\right)^{(m-1)/2} e^{-(m-2)/2}} \right] \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \sqrt{\frac{2}{m}} \frac{\sqrt{2\pi} \left(\frac{m-1}{2}\right)^{m/2} e^{-(m-1)/2}}{\sqrt{2\pi} \left(\frac{m-2}{2}\right)^{(m-1)/2} e^{-(m-2)/2}} \right] \\
 &\quad \times \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) / \sqrt{2\pi} \left(\frac{m-1}{2}\right)^{m/2} e^{-(m-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) / \sqrt{2\pi} \left(\frac{m-2}{2}\right)^{(m-1)/2} e^{-(m-2)/2}} \right] \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \sqrt{\frac{2}{m}} \frac{\sqrt{2\pi} \left(\frac{m-1}{2}\right)^{m/2} e^{-(m-1)/2}}{\sqrt{2\pi} \left(\frac{m-2}{2}\right)^{(m-1)/2} e^{-(m-2)/2}} \right] \tag{4.9}
 \end{aligned}$$

donde la última igualdad utilizó (4.7) y (4.8). Observe ahora que

$$\left[ \sqrt{\frac{2}{m}} \frac{\sqrt{2\pi} \left(\frac{m-1}{2}\right)^{m/2} e^{-(m-1)/2}}{\sqrt{2\pi} \left(\frac{m-2}{2}\right)^{(m-1)/2} e^{-(m-2)/2}} \right] = \left(\frac{m-1}{m}\right)^{1/2} \left(\frac{m-1}{m-2}\right)^{m/2} e^{-1/2}; \tag{4.10}$$

además,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{m-1}{m}\right)^{1/2} = 1,$$

y

$$\begin{aligned}
 \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{m-1}{m-2}\right)^{m/2} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m-2}\right)^{m/2} \\
 &= e^{1/2},
 \end{aligned}$$

igualdad que se establece en (Hildebrand, 1979) o (Fulks, 1981). Combinando estas las dos últimas convergencias con (4.10) se concluye

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \sqrt{\frac{2}{m}} \frac{\sqrt{2\pi} \left(\frac{m-1}{2}\right)^{m/2} e^{-(m-1)/2}}{\sqrt{2\pi} \left(\frac{m-2}{2}\right)^{(m-1)/2} e^{-(m-2)/2}} \right] = 1,$$

y enonces (4.9) implica que  $\lim_{m \rightarrow \infty} J_m = 1$ . □

## Estimación Clásica de los Límites de Control

El procedimiento de estimación de los límites de control presentado en la Sección 3 utiliza los estimadores insesgados de menor varianza. Sin embargo, mientras que en las aplicaciones el parámetro  $\mu_0$  se estima mediante la media muestral  $\hat{\mu}_0$  en (3.2), la desviación estándar inicial  $\sigma_0$  no se estima mediante  $\hat{\sigma}_0$  en (3.4), y en su lugar se emplea un procedimiento alternativo basado en los rangos de las muestras piloto (Duncan, 1989; John, 1990). En general, dada una sucesión  $(W_1, W_2, \dots, W_n)$  de variables aleatorias, su rango se define mediante

$$R_W = \text{Rango de } (W_1, W_2, \dots, W_n) = \max_{j=1,2,\dots,n} W_j - \min_{j=1,2,\dots,n} W_j. \quad (5.1)$$

El método clásico de estimación de  $\sigma_0$  basado en rangos consiste en tres etapas descritas a continuación.

**Paso 1.** Para cada muestra piloto,  $X_1^i, X_2^i, X_2^i, \dots, X_n^i$ ,  $i = 1, 2, \dots, K$ , calcule su rango  $R_i$ :

$$R_i = \max_{j=1,2,\dots,n} X_j^i - \min_{j=1,2,\dots,n} X_j^i, \quad (5.2)$$

**Paso 2.** Calcule el promedio de los rangos  $R_i$  evaluados en la etapa anterior:

$$\bar{R} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K R_i. \quad (5.3)$$

**Paso 3.** El estimador  $\tilde{\sigma}_0$  de  $\sigma_0$  se determina mediante

$$\tilde{\sigma}_0 = \frac{1}{c_n} \bar{R}, \quad (5.4)$$

donde  $c_n$  es el valor esperado del rango de una muestra de tamaño  $n$  de la distribución normal estándar.

A continuación se demostrará que  $\tilde{\sigma}_0$  es un estimador insesgado de  $\sigma_0$ .

**Teorema 5.1.** Considere una muestra  $W_1, W_2, \dots, W_n$  de la distribución  $\mathcal{N}(0, 1)$ , sea  $R_W$  el rango de esta muestra definido en (5.1), y defina

$$c_n = E[R_W].$$

Con esta notación,

(i) Para  $i = 1, 2, \dots, K$ ,  $E[R_i] = c_n \sigma_0$ .

(ii)  $E[\bar{R}] = c_n \sigma_0$ .

Consecuentemente,

(iii)  $\tilde{\sigma}_0$  en (5.4) es un estimador insesgado de  $\sigma_0$ .

**Demostración.** Debido a que las variables aleatorias  $W_i$  son una muestra de la distribución normal estándar, se tiene que

$(\mu_0 + \sigma_0 W_1, \mu_0 + \sigma_0 W_2, \dots, \mu_0 + \sigma_0 W_n)$  es una muestra de  $\mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2)$ .

Luego, para todo  $i = 1, 2, \dots, K$ ,

$$(X_1^i, X_2^i, \dots, X_n^i) \stackrel{d}{=} (\mu_0 + \sigma_0 W_1, \mu_0 + \sigma_0 W_2, \dots, \mu_0 + \sigma_0 W_n)$$

donde ' $\stackrel{d}{=}$ ' denota igualdad en distribución. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} R_i &= \max_{j=1,2,\dots,n} X_j^i - \min_{j=1,2,\dots,n} X_j^i \\ &\stackrel{d}{=} \max_{j=1,2,\dots,n} (\mu_0 + \sigma_0 W_j) - \min_{j=1,2,\dots,n} (\mu_0 + \sigma_0 W_j) \\ &= \left[ \mu_0 + \sigma_0 \max_{j=1,2,\dots,n} W_j \right] - \left[ \mu_0 + \sigma_0 \min_{j=1,2,\dots,n} W_j \right] \\ &= \sigma_0 \left[ \max_{j=1,2,\dots,n} W_j - \min_{j=1,2,\dots,n} W_j \right] \\ &= \sigma_0 R_W. \end{aligned}$$

Este argumento muestra que  $R_i$  tiene la misma distribución que  $\sigma_0 R_W$ , de donde se desprende que los valores esperados coinciden, esto es,  $E[R_i] = E[\sigma_0 R_W] = \sigma_0 E[R_W] = \sigma_0 c_n$ , estableciendo la parte (i). A continuación observe que  $E[\bar{R}] = E[n^{-1} \sum_{i=1}^n R_i] = n^{-1} \sum_{i=1}^n E[R_i] = n^{-1} \sum_{i=1}^n c_n \sigma_0 = c_n \sigma_0$ , demostrando la parte (ii). Para concluir note que esta igualdad implica

$$E \left[ \frac{\bar{R}}{c_n} \right] = \frac{E[\bar{R}]}{c_n} = \frac{c_n \sigma_0}{c_n} = \sigma_0,$$

estableciendo la conclusión deseada.  $\square$

El resultado previo muestra que  $\tilde{\sigma}_0$  en (5.4) es un estimador insesgado de  $\sigma_0$ . Definiendo

$$\tilde{\tau}_0 = \frac{\tilde{\sigma}_0}{\sqrt{n}}, \quad (5.5)$$

se tiene que  $\tilde{\tau}_0$  es un estimador insesgado de  $\tau_0$ , y los límites de control pueden estimarse mediante

$$\tilde{L} = \hat{\mu}_0 - \tilde{\tau}_0 z_{\alpha/2}, \quad y \quad \tilde{U} = \hat{\mu}_0 + \tilde{\tau}_0 z_{\alpha/2}. \quad (5.6)$$

Estos estimadores satisfacen que  $E[\tilde{L}] = L$  y  $E[\tilde{U}] = U$  y se utilizan para contruir el gráfico de control en las aplicaciones. Puesto que los estimadores  $\hat{L}$  y  $\hat{U}$  son los mejores, en el sentido de que su varianza es mínima, es natural preguntarse por la razón que lleva a preferir a la pareja  $(\tilde{L}, \tilde{U})$  sobre  $(\hat{L}, \hat{U})$  para trazar el gráfico. La respuesta está en la simplicidad: Calcular los rangos  $R_i$  para muestras pequeñas como las que se utilizan en las aplicaciones (de tamaño  $n = 4$  o  $n = 5$ ) puede hacerse a simple vista, mientras que evaluar  $s_0^2$  en (3.2) cuando  $K = 20$  y  $n = 4$  o  $n = 5$  requiere de cálculos más complicados. Aunque esta ventaja puede considerarse intrascendente en la época actual, en la que prácticamente cualquier calculadora de bolsillo puede utilizarse para evaluar  $\sigma_0$ , la simplicidad es aún un factor de importancia, pue se trata de que que el gráfico de control sea un instrumento que esté ‘al alcance’ de todos los participantes en el proceso de producción, y la sencillez de los procedimientos utilizados es un catalizador de la participación de todo el personal en el cuidado del control estadístico del proceso productivo.

Por otro lado, aunque el cálculo de  $\tilde{\sigma}_0$  es mucho más simple que el de  $s_0^2$ , se requiere conocer la constante  $c_n$  en (5.4). Aunque existen tablas de dichos valores para diversos valores de  $n$ , es interesante describir un método computacional para determinar esas constantes, tema que se aborda a continuación.

**Teorema 5.2.** La constante  $c_n$  en (5.4) está dada por

$$c_n = 2 \int_{\mathbb{R}} nx\varphi(x)\Phi(x)^{n-1} dx,$$

donde  $\varphi(x)$  es la densidad normal estándar y  $\Phi(x)$  es la correspondiente función de distribución.

**Demostración.** Como en el enunciado del Teorema 5.1, sea  $W_1, W_2, \dots, W_n$  una muestra de  $\mathcal{N}(0, 1)$ , y sea  $R_W$  el rango definido en (5.1). Siguiendo la notación usual, defina

$$W_{(n)} = \max_{j=1,2,\dots,n} W_j, \quad \text{y} \quad W_{(1)} = \min_{j=1,2,\dots,n} W_j, \quad (5.7)$$

de manera que  $R_W = W_{(n)} - W_{(1)}$ , y entonces

$$E[R_W] = E[W_{(n)}] - E[W_{(1)}]. \quad (5.8)$$

Observe ahora que debido a la simetría de la distribución normal estándar respecto al origen, se tiene que

$$(W_1, W_2, \dots, W_n) \stackrel{d}{=} (-W_1, -W_2, \dots, -W_n),$$

y combinando esta relación con (5.7) se obtiene

$$\begin{aligned} W_{(n)} &= \max_{j=1,2,\dots,n} W_j \\ &\stackrel{d}{=} \max_{j=1,2,\dots,n} -W_j \\ &= -\min_{j=1,2,\dots,n} W_j \\ &= -\min_{j=1,2,\dots,n} W_j \\ &= -W_{(1)}, \end{aligned}$$

argumento que muestra que  $W_{(n)}$  y  $-W_{(1)}$  tienen la misma distribución. Por lo tanto,  $E[W_{(n)}] = E[-W_{(1)}]$ , y usando (5.8) se desprende

$$E[R_W] = E[W_{(n)}] - E[W_{(1)}] = 2E[W_{(n)}].$$



Para concluir, note que la densidad de  $W_{(n)}$  es  $n\varphi(x)\Phi(x)^{n-1}$ , de tal forma que

$$E[R_W] = 2E[W_{(n)}] = 2 \int_{\mathbb{R}} x[n\varphi(x)\Phi(x)^{n-1}] dx.$$

□

Aunque la fórmula en el Teorema 5.2 es aparentemente simple, no puede, en general, evaluarse en forma ‘cerrada’, esto es mediante el teorema fundamental del del cálculo, y se requieren métodos numéricos para calcularla. Note que la dificultad para implementar un método de cómputo radica en que la función  $\Phi(x)$  no puede evaluarse directamente; esta es la razón por la que se encuentra tabulada extensivamente. A continuación se establecerá una fórmula de aproximación para  $\Phi(x)$  la cual es útil para calcular la integral en el Teorema 5.2, que además tiene interés por si misma. La demostración de este resultado puede encontrarse en (Zelen y Severo, 1979).

**Teorema 5.3.** Defina las constantes  $p$  y  $b_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5$  mediante

$$\begin{aligned} p &= 0,2316419, & b_1 &= 0.319381530 \\ b_2 &= -0.356563782, & b_3 &= 1.781477937 \\ b_4 &= -1.821255978, & b_5 &= 1.330274429. \end{aligned}$$

Para cada  $x \geq 0$  sea

$$t = \frac{1}{1 + px},$$

y

$$P(x) = 1 - \varphi(x) \left[ \sum_{i=1}^5 b_i t^i \right],$$

donde  $\varphi(x)$  es la densidad normal estándar. En este caso, para todo  $x \geq 0$ ,

$$|\Phi(x) - P(x)| \leq 7.5 \times 10^{-8}.$$

Este resultado proporciona un método poderoso para aproximar  $\Phi(x)$  mediante una función racional, el cual puede combinarse con cualquier método de

integración numérica para calcular las constantes  $c_n$  en (5.4); vea, por ejemplo, (Stoer y Burlisch, 1983; Conte y Boor, 1972; Hildebrand, 1974), o (Ralston y Rabinowitz, 1978). Por otro lado, es conveniente mencionar que el Teorema 5.3 ha sido utilizado en el presente trabajo para calcular las probabilidades determinadas a través de la distribución normal.

## Control de la Desviación Estándar

Hasta ahora se ha considerado el gráfico de control para el valor esperado de la característica de interés asociado al valor inicial  $\mu_0$ . Sin embargo, como se mencionó en la Sección 2.4, en las aplicaciones es necesario monitorear el comportamiento de la desviación estándar, y a continuación se describe el procedimiento clásico para determinar un gráfico para este parámetro.

En la implementación del gráfico, lo que se marca al extraer una muestra de  $n$  artículos de la línea de producción, es el rango de los datos obtenidos a partir de la muestra, lo cual significa que se traza un gráfico para el valor esperado de los rangos. Sin embargo, controlar el valor medio de un rango y el de la desviación estándar son procesos equivalentes, pues  $E[R] = c_n\sigma$ , por el Teorema 5.1(i). Para calcular los límites de control, es necesario evaluar la varianza del rango de una muestra arbitraria de tamaño  $n$ .

**Teorema 6.1.** Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  una muestra de tamaño  $n$  de la distribución  $\mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0)$ , y sea  $R$  el rango de la muestra. Entonces,

$$\text{Var}[R] = d_n\sigma_0^2,$$

donde

$$d_n = \int \int_{y>x} (y-x)^2 n(n-1)\varphi(x)\varphi(y)[\Phi(y) - \Phi(x)]^{n-2} dy dx - c_n^2$$

es la varianza del rango de una muestra de tamaño  $n$  de la distribución normal estándar.

integración numérica para calcular las constantes  $c_n$  en (5.4); vea, por ejemplo, (Stoer y Burlisch, 1983; Conte y Boor, 1972; Hildebrand, 1974), o (Ralston y Rabinowitz, 1978). Por otro lado, es conveniente mencionar que el Teorema 5.3 ha sido utilizado en el presente trabajo para calcular las probabilidades determinadas a través de la distribución normal.

## Control de la Desviación Estándar

Hasta ahora se ha considerado el gráfico de control para el valor esperado de la característica de interés asociado al valor inicial  $\mu_0$ . Sin embargo, como se mencionó en la Sección 2.4, en las aplicaciones es necesario monitorear el comportamiento de la desviación estándar, y a continuación se describe el procedimiento clásico para determinar un gráfico para este parámetro.

En la implementación del gráfico, lo que se marca al extraer una muestra de  $n$  artículos de la línea de producción, es el rango de los datos obtenidos a partir de la muestra, lo cual significa que se traza un gráfico para el valor esperado de los rangos. Sin embargo, controlar el valor medio de un rango y el de la desviación estándar son procesos equivalentes, pues  $E[R] = c_n\sigma$ , por el Teorema 5.1(i). Para calcular los límites de control, es necesario evaluar la varianza del rango de una muestra arbitraria de tamaño  $n$ .

**Teorema 6.1.** Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  una muestra de tamaño  $n$  de la distribución  $\mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0)$ , y sea  $R$  el rango de la muestra. Entonces,

$$\text{Var}[R] = d_n\sigma_0^2,$$

donde

$$d_n = \int \int_{y>x} (y-x)^2 n(n-1)\varphi(x)\varphi(y)[\Phi(y) - \Phi(x)]^{n-2} dy dx - c_n^2$$

es la varianza del rango de una muestra de tamaño  $n$  de la distribución normal estándar.

**Demostración.** Considere una muestra  $W_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  de la distribución normal estándar. Como en el argumento utilizado para establecer el teorema 5.1, se tiene que

$$(\mu_0 + \sigma_0 W_1, \mu_0 + \sigma_0 W_2, \dots, \mu_0 + \sigma_0 W_n) \text{ es una muestra de } \mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2).$$

Luego,

$$(X_1, X_2, \dots, X_n) \stackrel{d}{=} (\mu_0 + \sigma_0 W_1, \mu_0 + \sigma_0 W_2, \dots, \mu_0 + \sigma_0 W_n)$$

donde ' $\stackrel{d}{=}$ ' denota igualdad en distribución. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} R &= \max_{j=1,2,\dots,n} X_j^i - \min_{j=1,2,\dots,n} X_j^i \\ &\stackrel{d}{=} \max_{j=1,2,\dots,n} (\mu_0 + \sigma_0 W_i) - \min_{j=1,2,\dots,n} (\mu_0 + \sigma_0 W_i) \\ &= \left[ \mu_0 + \sigma_0 \max_{j=1,2,\dots,n} W_i \right] - \left[ \mu_0 + \sigma_0 \min_{j=1,2,\dots,n} W_i \right] \\ &= \sigma_0 \left[ \max_{j=1,2,\dots,n} W_i - \min_{j=1,2,\dots,n} W_i \right] \\ &= \sigma_0 R_W \end{aligned}$$

de manera que  $R$  y  $\sigma_0 R_W$  tienen la misma distribución. En consecuencia

$$\text{Var}[R] = \sigma_0^2 \text{Var}[R_W] = d_n \sigma_0^2,$$

donde  $d_n$  es la varianza de  $R_W$ , el rango de la muestra de tamaño  $n$  de la distribución normal estándar. Para concluir note que la densidad conjunta de la pareja  $(Y, X) = (\max_i W_i, \min_i W_i)$  es

$$n(n-1)\varphi(y)\varphi(x)[\Phi(y) - \Phi(x)]^{n-2} \quad \text{en la región } y > x,$$

de donde se desprende

$$E[R_w^2] = E[(Y - X)^2] = \int \int_{y>x} n(n-1)(y-x)^2 \varphi(y)\varphi(x) [\Phi(y) - \Phi(x)]^{n-2},$$

y entonces

$$\begin{aligned}\text{Var}[R_W] &= E[R_W^2] - (E[R_W])^2 \\ &= \int \int_{y>x} n(n-1)(y-x)^2 \varphi(y)\varphi(x)[\Phi(y) - \Phi(x)]^{n-2} - c_n^2,\end{aligned}$$

donde  $c_n = E[R_W]$ . □

El gráfico de control para el valor esperado del rango de una muestra de tamaño  $n$  se construye como sigue:

1. Suponga primero que  $\sigma_0$  es conocida, de manera que  $E[R] = c_n\sigma_0$  puede determinarse de manera exacta. Por el Teorema 6.1,  $\text{Var}[R] = d_n\sigma_0^2$ , y bajo la premisa de que la distribución de  $R$  es aproximadamente normal, el intervalo

$$[c_n\sigma_0 - 3\sqrt{d_n\sigma_0^2}, c_n\sigma_0 + 3\sqrt{d_n\sigma_0^2}] \quad (6.1)$$

tiene un nivel de inclusión aproximado de  $1 - 0.00270 = 0,99730$  para  $R$ , esto es,

$$P[c_n\sigma_0 - 3\sqrt{d_n\sigma_0^2} \leq R \leq c_n\sigma_0 + 3\sqrt{d_n\sigma_0^2}] \approx 1 - 2[1 - \Phi(3)] = 0.999730.$$

El problema fundamental con el intervalo (6.1) es que  $\sigma_0$ , el valor inicial de la desviación estándar de la característica de interés, no es conocido; sin embargo, se tienen las muestras piloto para estimarlo.

2. El valor inicial  $\sigma_0$  se estima mediante  $\tilde{\sigma}_0$  en (5.4), esto es,

$$\tilde{\sigma}_0 = \frac{\bar{R}}{c_n},$$

y como estimadores de los puntos extremos del intervalo (6.1) se toman

$$\begin{aligned}\tilde{L} &= c_n\tilde{\sigma}_0 - 3\sqrt{d_n} = c_n\tilde{\sigma}_0 - 3\tilde{\sigma}_0\sqrt{d_n} \\ &= \bar{R} - 3\frac{\bar{R}}{c_n}\sqrt{d_n} = \bar{R} \left[ 1 - 3\frac{\sqrt{d_n}}{c_n} \right]\end{aligned} \quad (6.2)$$

y

$$\begin{aligned}\tilde{U} &= c_n\tilde{\sigma}_0 + 3\sqrt{d_n} = c_n\tilde{\sigma}_0 + 3\tilde{\sigma}_0\sqrt{d_n} \\ &= \bar{R} + 3\frac{\bar{R}}{c_n}\sqrt{d_n} = \bar{R} \left[ 1 + 3\frac{\sqrt{d_n}}{c_n} \right]\end{aligned} \quad (6.3)$$

3. El gráfico de control para el valor esperado del rango de muestras de tamaño  $n$  se obtiene trazando líneas a través de los puntos  $(0, \tilde{L})$  y  $(0, \tilde{U})$ , y marcando, conforme se extraen muestras de  $n$  artículos, el valor del rango de las observaciones obtenidas. Si una de ellas no pertenece al intervalo  $[\tilde{L}, \tilde{U}]$ , se declara que el valor esperado del rango de  $n$  observaciones ya no conserva su valor original, lo cual equivale a que el valor de la desviación estandar ya no coincide con su valor inicial  $\sigma_0$ .

El procedimiento delineado, el cual culmina en el punto 3, se basa en el supuesto de que el rango de una muestra de una distribución normal también está normalmente distribuido, aunque sea de manera aproximada. Esta premisa, desde luego, no es correcta, de manera que el nivel de inclusión puede bajar hasta 95 por ciento (vea el Teorema 5.2), o quizá hasta niveles más bajos. Sin embargo, el aspecto relevante es que el procedimiento operacional es simple, permitiendo que todos los participantes tengan una participación directa.

## Las Especificaciones y Capacidad del Proceso

Hasta ahora se ha restringido la atención al problema de monitorear el proceso productivo para asegurar que éste se desarrolle bajo condiciones estacionarias, esto es, que los parámetros iniciales  $\mu_0$  y  $\sigma_0$  no alteren su valor conforme transcurre el tiempo. Sin embargo, el interés real del fabricante no es la estacionaridad del proceso en si misma, sino más bien, que los artículos que produce cumplan con las especificaciones. En realidad, la intención detrás del esfuerzo para que los parámetros iniciales no se alteren, es conservar los productos fabricados dentro de los estándares impuestos por el consumidor. Suponga que los demandantes de los productos están dispuestos a aceptar un artículo siempre que el valor de la característica de interés se ubique en el intervalo

$$(\mu^* - \delta^*, \mu^* + \delta^*). \quad (7.1)$$

El valor  $\mu^*$  se piensa como el nivel preferido del rasgo relevante, mientras que  $\delta^*$  es la desviación máxima que el consumidor está dispuesto a admitir. La idea de

*capacidad del proceso* relaciona las especificaciones con el valor de los parámetros de interés de los productos fabricados (John (1990)).

**Definición 7.1.** Suponga que  $\mu_0$  y  $\sigma_0$  son el valor esperado y la desviación estándar de la característica de interés de los productos fabricados. En este caso, la *capacidad inferior* del proceso se define mediante

$$CI = \frac{\mu_0 - [\mu^* - \delta^*]}{3\sigma_0},$$

mientras que la *capacidad superior* está dada por

$$CS = \frac{[\mu^* + \delta^*] - \mu_0}{3\sigma_0}.$$

El siguiente resultado se desprende de inmediato a partir de esta definición.

**Lema 7.1.** Suponga que  $CI \geq r$  y  $CS \geq r$ . Entonces

$$\mu_0 - 3r\sigma_0 \geq \mu^* - \delta^*, \quad \text{y} \quad \mu_0 + 3r\sigma_0 \leq \mu^* + \delta^*.$$

En particular, si  $CS$  y  $CI$  son mayores o iguales a uno, entonces los límites de control con nivel de inclusión 0.999730 se encuentran dentro del intervalo (7.1).

A partir de este lema es claro que a medida que  $CI$  y  $CS$  aumentan su valor, el productor cumplirá con las especificaciones del consumidor en mayor medida. En la industria electrónica, valores de las capacidades superior e inferior mayores o iguales dos son comunes.

## Conclusión

En este capítulo se han abordado aspectos relacionados con la implementación práctica de los gráficos de control, prestando especial atención al uso de los rangos de las muestras piloto para estimar el valor inicial de la desviación estándar. El procedimiento de estimación óptima de los límites de control para la media se presentó en la Sección 3.3, y se discutió el efecto de utilizar estimaciones

en vez de valores reales de los parámetros para trazar el gráfico. El resultado en esta dirección está contenido en el Teorema 4.1, en donde se demostró que bajo las condiciones usuales sobre las muestras piloto, la probabilidad de declarar incorrectamente que el proceso se encuentra fuera de control puede determinarse a través de la distribución  $t$ . Como dicha distribución tiene por lo menos 79 grados de libertad en las aplicaciones, la aproximación normal a la distribución  $t$  puede utilizarse con seguridad, y usando este enfoque se obtuvo que las consecuencias sobre el valor real de  $\alpha$  no son significativas. Las secciones 5 y 6 consideraron la construcción clásica de los gráficos de control para la media y la desviación estándar en base a rangos, y en la Sección 7 se discutió brevemente la idea de capacidad de proceso, mostrando que si el valor de las capacidades superior e inferior es por lo menos uno y el proceso se encuentra bajo control estadístico, entonces la proporción de artículos que satisfacen las especificaciones es por lo menos igual a 0.999730.



# REGLAS DE PARO Y LONGITUD PROMEDIO DE CORRIDAS

Este capítulo trata sobre la noción de *regla o norma de paro*, la cual es el medio que lleva la información contenida en un gráfico de control hacia el área de toma de decisiones. La exposición gira alrededor de las diversas reglas que son utilizadas para decidir cuando debe revisarse un proceso productivo, y la manera en que se mide el funcionamiento de una norma. El criterio utilizado, a saber, la *longitud promedio de corridas*, es estudiado en detalle, y se resuelve el problema de determinar este índice para una regla generalizada que combina dos normas ampliamente utilizadas.

## Introducción

El propósito de este capítulo es introducir formalmente la noción de *regla o norma de paro* derivada de un gráfico de control, así como estudiar el criterio para evaluar su funcionamiento. En general, cuando el valor esperado del rasgo de interés sufre una alteración, ésta no será detectada de inmediato, sino que transcurrirá un cierto tiempo para que el cambio sea percibido, teniendo, cada vez que se realiza una inspección sobre los artículos finales en la línea de producción, la oportunidad de emitir la señal de revisión del proceso de fabricación y, consecuentemente, corregir la alteración imperante. Sin embargo, la decisión de analizar el proceso es una función de la forma en que los datos observados y

marcados en el gráfico de control son utilizados, es decir, depende de la *estrategia* que el ingeniero de control implemente, de tal manera que diferentes enfoques para el empleo de la información del gráfico conducirán, generalmente, a distintos tiempos de emisión de la señal de alerta. Debido a que lo que se pretende es mantener el proceso en condiciones estables, una regla de paro será mejor en la medida que conduzca a percibir cambios en el valor esperado del rasgo de interés en el menor tiempo posible.

De manera formal, una *regla o norma de paro* es la especificación de un conjunto de condiciones sobre las observaciones marcadas en el gráfico de control, de acuerdo a las cuales se toma la decisión de emitir la señal de revisión del proceso productivo, y el desarrollo del capítulo se centra en la determinación del índice de funcionamiento de dichas normas. Antes de seguir adelante, es oportuno establecer la hipótesis de trabajo y las condiciones sobre las que se desarrollará la discusión presentada en las siguientes secciones: Las medias muestrales  $Y_i$  que se obtienen al revisar el proceso *forman una sucesión de variables independientes con distribución normal*; su media es  $\theta$  y su varianza es  $\tau$ . Los valores iniciales de estos parámetros son  $\theta_0$  y  $\tau_0$ , y en un momento determinado el proceso se encuentra bajo control estadístico si  $\theta$  y  $\tau$  conservan sus valores iniciales, esto es, si  $\theta = \theta_0$  y  $\tau = \tau_0$ . Por otro lado, se supondrá que  $\theta$  puede alterar su valor mientras que  $\tau$  permanecerá constante e igual a  $\tau_0$ ; la implicación práctica de este supuesto es que los cambios en  $\tau$ , si acaso se presentan, serán de una magnitud ‘pequeña’ comparados con las alteraciones en el valor de  $\theta$ . Finalmente, recuerde que  $\tau = \sigma/\sqrt{n}$ , donde  $\sigma$  es la desviación estándar del rasgo de interés obtenido de un producto final.

Después de este preámbulo, la organización del capítulo puede describirse como sigue: En la Sección 2 se define la noción de *corrida de datos*, y se introduce la longitud esperada de una corrida como el índice de funcionamiento de una norma de paro. En la Sección 3 se considera la regla de paro fundamental, determinándose la medida de la bondad de dicha norma utilizando dos métodos; el primero utiliza

la definición directa en términos estadísticos, mientras que el segundo enfoque utiliza un método indirecto que representa un instrumento poderoso para tratar situaciones más complejas, como las consideradas en la Secciones 4 y 5. En la Sección 6 se presenta el resultado técnico central de este capítulo, el cual se refiere a una norma de paro combinada, generaliza resultados comúnmente utilizados, y pone de relieve la potencia del enfoque indirecto para determinar índices de funcionamiento. Finalmente, el capítulo concluye en la Sección 7 con algunos comentarios breves.

## El Índice de Funcionamiento

Considere un gráfico de control asociado al valor inicial  $\theta_0$  de un característica de interés. En este capítulo se supone que los límites correspondientes están dados por

$$L = \theta_0 - 3 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} = \theta_0 - 3\tau_0, \quad U = \theta_0 + 3 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} = \theta_0 + 3\tau_0, \quad (2.1)$$

especificación que se conoce como la regla de las tres sigmas; recuerde que  $\sigma_0$  es la desviación estándar del rasgo de interés  $X$  medido en un producto mientras el proceso mantiene sus condiciones iniciales, y que  $\tau_0^2 = \sigma_0^2/n$  es la varianza de la media de  $n$  observaciones obtenidas bajo las mismas circunstancias. Suponiendo la condición de normalidad de las observaciones individuales, el intervalo  $[L, U]$  incluye a una media de  $n$  datos con probabilidad  $1 - \alpha = 0.99730$ , siempre y cuando la pareja  $(\theta, \sigma)$  no altere su valor original.

Después del momento inicial el proceso productivo transcurre, se toman muestras de  $n$  productos finales a intervalos regulares, se evalúan las medias correspondientes  $Y_i$ , y se marcan en el gráfico de control como se describió en el Capítulo 2. Los datos obtenidos serán utilizados por el observador para decidir el momento en el que el proceso debe revisarse, actuando de conformidad a una *regla de paro* previamente estipulada.

**Definición 2.1.** Suponga que al seleccionar la  $k$ -ésima muestra de  $n$  artículos, el valor esperado del rasgo de interés asume un valor  $\theta^*$ , el cual ya no sufre alteración posterior. Sea  $k + N$  el momento en que, de acuerdo a su regla de paro, y en base solamente a  $Y_{k+1}, Y_{k+2}, \dots, Y_{k+N}$ , el observador declara que es necesario revisar el proceso productivo. En este caso, la sucesión de medias

$$Y_{k+1}, Y_{k+2}, \dots, Y_{k+N},$$

las cuales se observan desde que  $\theta$  altera su valor inicial hasta que se declara la necesidad de inspeccionar el proceso, se llama *una corrida* de datos, mientras que  $N$  es la longitud de la corrida.

Es importante notar que  $N$ , la longitud de la corrida en la definición anterior, es el número de inspecciones que se realizan en la línea de producción antes de que el proceso se revise. Cuando las muestras se toman a intervalos regulares y la tasa de producción es constante,  $N$  es proporcional al número de artículos producidos desde que el valor esperado del rasgo de interés alteró su valor, y el fabricante está naturalmente interesado en que  $N$  sea lo más pequeño posible. De esta forma, ante la posibilidad de elegir entre dos reglas de paro, se preferirá aquella que produzca menores longitudes de corridas, esto es, los valores de  $N$  pueden utilizarse para medir el funcionamiento de una norma de actuación. Sin embargo,  $N$  es una variable aleatoria, y como índice de funcionamiento de una regla de paro se utiliza el valor esperado de  $N$ .

**Definición 2.2.** En el contexto de la Definición 2.1, la longitud promedio de la corrida se define mediante

$$\mathbf{LPC} = \mathbf{LPC}(\theta^*) = E_{\theta^*}[N]. \quad (2.2)$$

Es conveniente puntualizar que la longitud promedio es una función de  $\theta^*$ , el valor actual del parámetro; el operador de valor esperado en el lado derecho de

vea, por ejemplo, el capítulo siete de (Dudewicz y Mishra, 1988). Luego,

$$\begin{aligned} \mathbf{LPC}(\theta^*) &= \sum_{n=2}^{\infty} n P_{\theta^*}[N = n] \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) p(\theta^*)^2 (1-p(\theta^*))^2 \\ &= \frac{2}{p(\theta^*)} \end{aligned}$$

Note que usando (2.4) se desprende que  $\mathbf{LPC}(\theta^*)$  es decreciente en  $\theta^*$ . Por ejemplo, cuando  $\theta^* = \theta_0$ , se obtiene que  $p(\theta_0) = 1 - \Phi(3) = 0.00135$  y entonces  $\mathbf{LPC}(\theta_0) = 2/0.00135 \approx 1482$ , mientras que para  $\theta^* = \theta_0 + 3\tau_0$ ,  $p(\theta^*) = 1 - \Phi(0) = 1/2$  de donde se desprende que  $\mathbf{LPC}(\theta_0 + 3\tau_0) = 2/0.5 = 4$ . Esta propiedad significa, que a medida que aumenta el valor de  $\theta^*$ , la regla de paro descrita permite detectar más rápidamente la desviación que  $\theta$  experimenta respecto a su valor inicial.  $\square$

Para describir las reglas de paro de uso común, es necesario introducir los siguientes términos: Además de las *líneas de control* trazadas través de los puntos  $(0, U)$  y  $(0, L)$ , las *líneas de advertencia* son paralelas a las líneas de control, y pasan por los puntos  $(0, \ell)$  y  $(0, u)$ , donde

$$\ell = \theta_0 - 2 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \quad u = \theta_0 + 2 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \quad (2.5)$$

mientras que la *línea central* es la horizontal que pasa por el punto  $(0, \theta_0)$ . La región comprendida entre las líneas de advertencia se llama franja de advertencia, mientras que aquella comprendida entre las líneas de control es la zona de aceptación, y el complemento de esta última es la zona de rechazo.

Las reglas de paro más frecuentemente utilizadas son las siguientes (John, 1990; Montgomery, 1985): Declarar que el valor esperado de la característica de interés se ha alterado, cuando se observa que

**RP<sub>1</sub>**: Un punto se localiza fuera de los límites tres sigma;

**RP<sub>2</sub>**: Dos puntos consecutivos se ubican más allá de los límites de advertencia o dos sigmas;

**RP<sub>3</sub>**: Siete puntos consecutivos o más se ubican todos por encima de la línea central o por debajo de la misma.

Desde luego, éstas no son las únicas reglas de paro, y entre otras, las siguientes pueden encontrarse en la literatura (Duncan, 1989; Montgomery, 1985):

Revisar el proceso cuando

**RP<sub>4</sub>**: Cuatro o cinco puntos consecutivos se localicen mas allá de los límites sigma;

**RP<sub>5</sub>**: Se observen patrones no aleatorios en los datos;

**RP<sub>6</sub>**: Uno o más puntos sena ‘cercanos ’a los limites de advertencia o a los límites de control.

Para concluir esta sección, es conveniente mencionar que el interés del analista puede centrarse en aumentos del valor esperado del rasgo de interés, por lo que la señal de alerta para revisar el proceso puede darse sólomente cuando las medias observadas se ubiquen por encima de la línea central; similarmente, si se desea detectar disminuciones en el parámetro  $\theta$ , se prestará atención al hecho de que las observaciones se ubiquen por debajo de dicha línea las reglas de paro que se diseñan para detectar exclusivamente aumentos o decrementos en el parámetro de interés se llaman unilaterales, mientras que aquéllas que buscan detectar cualquier alteración de  $\theta$  se conocen como reglas bilaterales. Otro punto relevante es que en ocasiones se combinan dos o más reglas para enviar la señal de alerta. Por ejemplo, al combinar las reglas **RP<sub>1</sub>** y **RP<sub>2</sub>**, la revisión del proceso productivo se realiza cuando una media se ubica fuera de la región de aceptación, o bien cuando dos o más medias consecutivas se localizan fuera de la banda de advertencia. Una regla de paro construida mezclando otras se llama *combinada*, y de otra forma se denomina *simple*.

## LPC Para la Primera Regla de Paro

En esta Sección se calcula las longitud promedio de corridas para la regla **RP**<sub>1</sub>. Antes de considerar el desarrollo para esta regla específica, es oportuno describir el procedimiento general: En el momento en que se extrae la  $k$ -ésima muestra de  $n$  productos, el parámetro importante conserva su valor original  $\theta_0$ , pero al obtener la muestra  $k + 1$  el parámetro asume ya otro valor  $\theta^*$ . Este cambio no es percibido de forma inmediata, y el proceso productivo continúa hasta que al seleccionar una muestra en la ocasión  $k + N$ , el inspector emite la señal de alerta declarando que el valor de  $\theta$  ya no es el original. El valor de  $N$  es aleatorio y su distribución depende de la regla de paro que se utilice. De acuerdo a la Definición 2.2, la longitud promedio de la corrida es

$$\text{LPC}(\theta^*) = E_{\theta^*}[N] = \sum_{n=1}^{\infty} n P_{\theta^*}[N = n], \quad (3.1)$$

así que un método para encontrar  $\text{LPC}(\theta^*)$  consiste en determinar la distribución de  $N$  cuando el parámetro asume el valor  $\theta^*$ , y utilizar la expresión (3.1) para determinar la esperanza de  $N$ .

**LPC Para la Regla de Paro 1.** Suponga que la señal de revisión del proceso productivo se da utilizando la regla **RP**<sub>1</sub> descrita en la sección anterior. Bajo este criterio, se considera que el proceso está fuera de control estadístico cuando una media  $Y_i$  se desvía de  $\theta_0$  por más de tres veces  $\tau_0$ , esto es, cuando  $Y_i \notin [L, U]$ ; vea (2.1). Para determinar **LPC** en este contexto, observe que las medias muestrales  $Y_{k+1}, Y_{k+2}, \dots$  son independiente con distribución común  $N(\theta^*, \tau_0)$ , y defina

$$P_{\theta^*}[Y_i \notin [L, U]] = p(\theta^*) = p. \quad (3.2)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 P_{\theta^*}[N = 1] &= P_{\theta^*}[Y_{k+1} \notin [L, U]] = p \\
 P_{\theta^*}[N = 2] &= P_{\theta^*}[Y_{k+1} \in [L, U], Y_{k+2} \notin [L, U]] = (1-p)p \\
 P_{\theta^*}[N = 3] &= P_{\theta^*}[Y_{k+1} \in [L, U], Y_{k+2} \in [L, U], Y_{k+3} \notin [L, U]] = (1-p)^2 p \\
 &\vdots \\
 P_{\theta^*}[N = n] &= P_{\theta^*}[Y_{k+i} \in [L, U], i < n, Y_{k+n} \notin [L, U]] = (1-p)^{n-1} p
 \end{aligned}$$

Este argumento muestra que la distribución de probabilidades de la variable aleatoria  $N$  es la distribución geométrica con parámetro  $p$  dado en (3.2):

$$P_{\theta^*}[N = n] = \begin{cases} (1-p)^{n-1} p, & \text{si } n = 1, 2, 3, \dots \\ 0, & \text{de otro modo,} \end{cases}$$

de manera que (Mood *et. al.* (1985))

$$E_{\theta^*}[N] = \frac{1}{p} = \mathbf{LPC}(\theta^*). \quad (3.3)$$

Note que el valor de  $p$  en esta igualdad puede evaluarse en términos de la función de distribución normal estándar:

$$\begin{aligned}
 p &= P_{\theta^*}[Y_i \notin [L, U]] = 1 - P_{\theta^*}[Y_i \in [L, U]] \\
 &= 1 - P_{\theta^*}[Y_i \in [\theta_0 - 3\tau_0, \theta_0 + 3\tau_0]] \\
 &= 1 - P_{\theta^*} \left[ -3 + \frac{\theta_0 - \theta^*}{\tau_0} < \frac{Y_i - \theta^*}{\tau_0} < 3 + \frac{\theta_0 - \theta^*}{\tau_0} \right] \\
 &= 1 - \left[ \Phi \left( 3 + \frac{\theta_0 - \theta^*}{\tau_0} \right) - \Phi \left( -3 + \frac{\theta_0 - \theta^*}{\tau_0} \right) \right]
 \end{aligned}$$

En particular, cuando  $\theta^* = \theta_0 + c\tau_0$ , esto es, si el parámetro de interés sufre un incremento igual a  $c$  veces la desviación estándar, entonces

$$\begin{aligned}
 1 - \left[ \Phi \left( 3 + \frac{\theta_0 - \theta^*}{\tau_0} \right) - \Phi \left( -3 + \frac{\theta_0 - \theta^*}{\tau_0} \right) \right] &= 1 - [\Phi(3-c) - \Phi(-3-c)] \\
 &= [1 - \Phi(3-c)] + \Phi(-3-c) \\
 &= \Phi(c-3) + \Phi(-3-c)
 \end{aligned}$$



donde la última igualdad se debe a que la distribución normal estándar es simétrica respecto al origen. A partir de esta expresión se concluye que

$$\begin{aligned}\theta^* = \theta_0 + c\tau_0 &\Rightarrow p = \Phi(c - 3) + \Phi(-3 - c) \\ &\Rightarrow \text{LPC} = \frac{1}{\Phi(c - 3) + \Phi(-3 - c)}\end{aligned}\quad (3.4)$$

**Un Procedimiento Alternativo.** La fórmula (3.3) para la longitud promedio de corridas bajo la regla  $\mathbf{RP}_1$  se obtuvo utilizando el procedimiento general delineado al principio de esta sección. Ahora se obtendrá la misma fórmula a través de un método indirecto que será aplicado a problemas más complejos en las secciones subsecuentes. Como punto de partida, divida el plano en el que se traza el gráfico en dos regiones. Una de ellas es la zona de aceptación  $\mathcal{A}$  descrita en el Capítulo 2, esto es,

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \mid L \leq y \leq U\},$$

mientras que la otra es el complemento de  $\mathcal{A}$ , la cual se conoce como la zona de rechazo:

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \mid y < L, \text{ o } y > U\}.$$

Al obtener la  $i$ -ésima muestra, calcular la media correspondiente  $Y_i$  y marcar el punto  $(i, Y_i)$ , entonces se emitirá la señal de revisión del proceso exactamente cuando  $(i, Y_i) \in \mathcal{R}$ , mientras que si  $(i, Y_i) \in \mathcal{A}$  no se toma acción alguna, pues éste último evento es considerado 'normal'. Denote mediante  $p_A$  y  $p_R$  las probabilidades de los eventos  $[(i, Y_i) \in \mathcal{A}]$  y  $[(i, Y_i) \in \mathcal{R}]$ , respectivamente, y note que cuando el parámetro de interés es  $\theta^*$  se tiene que

$$p_A = P_{\theta^*}[Y_i \in [L, U]], \quad \text{y} \quad p_R = P_{\theta^*}[Y_i \notin [L, U]]. \quad (3.5)$$

Considere ahora la situación que enfrenta el observador aplicando  $\mathbf{RP}_1$  cuando al seleccionar la muestra  $k + 1$  el parámetro toma el valor  $\theta^*$ , el cual se mantendrá fijo hasta que el proceso sea revisado. Hay dos posibles alternativas:

(a) Puede ocurrir que  $Y_{k+1} \notin [L, U]$ , esto es, que  $(i, Y_i) \in \mathcal{R}$ . La probabilidad de este evento es  $p_R$ , y cuando ocurre se tiene que  $N = 1$ , el proceso se revisa y la alteración se corrige. Una manera equivalente de expresar esta observación es

$$E_{\theta^*}[N|Y_i \notin [L, U]] = 1.$$

(b) La otra posibilidad es que  $Y_{k+1} \in [L, U]$ , i.e., que  $(i, Y_i) \in \mathcal{A}$ . La probabilidad de este evento es  $p_A$  y cuando ocurre  $N$  asume un valor mayor a 1. De hecho, el observador tomará la muestra en el momento  $k + 2$  y se encontrará ante una situación similar a la que se tenía al seleccionar la muestra  $k + 1$ , es decir  $\theta$  asume el valor  $\theta^*$ , el cual será conservado hasta que se de la señal de alerta, de manera que el número de muestras que se seleccionarán a partir de la ocasión  $k + 2$  tiene el mismo valor esperado que  $N$ . Luego,

$$E_{\theta^*}[N|Y_{k+1} \in [L, U]] = 1 + E_{\theta^*}[N].$$

Usando las dos igualdades en (a) y (b) se obtiene, a partir del Teorema de la Doble Esperanza, que

$$\begin{aligned} E_{\theta^*}[N] &= E_{\theta^*}[N|Y_i \notin [L, U]]P_{\theta^*}[Y_i \notin [L, U]] + E_{\theta^*}[N|Y_i \in [L, U]]P_{\theta^*}[Y_i \in [L, U]] \\ &= 1 \times P_{\theta^*}[Y_i \notin [L, U]] + (1 + E_{\theta^*}[N])P_{\theta^*}[Y_i \in [L, U]] \\ &= p_R + (1 + E_{\theta^*}[N])p_A \\ &= 1 + E_{\theta^*}[N]p_A \end{aligned}$$

donde la última igualdad se desprende de la relación  $p_A + p_R = 1$ ; vea (3.5). En consecuencia,

$$E_{\theta^*}[N] = 1 + E_{\theta^*}[N]p_A$$

de donde se obtiene

$$E_{\theta^*}[N] = \frac{1}{1 - p_A} = \frac{1}{p_R}. \quad (3.6)$$

El aspecto importante en el argumento que acaba de presentarse, es que se ha obtenido el valor esperado de  $N$  ¡sin determinar su distribución de probabilidad!

Comparando (3.6) y (3.3), se desprende, via las definiciones de  $p$  y  $p_R$  en (3.2) y (3.5), que ambas expresiones para  $E_{\theta^*}[N]$  coinciden.

**Ejemplos.** Suponga que se que en cierto momento el valor de  $\theta$  se incrementa por  $c$  veces la desviación estándar de las medias muestrales, de manera que asume el valor

$$\theta^* = \theta_0 + c\tau_0,$$

el cual se mantiene hasta que se emite la señal para revisar el proceso. El valor de  $p_R$  es

$$\begin{aligned} p_R &= P_{\theta^*}[Y_i \notin [L, U]] \\ &= P_{\theta^*}[Y_i \notin [L, U]] \end{aligned}$$

Como se demostró en la expresión (3.4), el valor correspondiente de  $p = p_R$  es  $p = \Phi(c - 3) + \Phi(-3 - c)$ , y cuando  $c = 1$  se tiene que  $p \approx \Phi(-2) = 0.0228$ , de tal forma que la longitud promedio de una corrida es

$$E_{\theta^*}[N] \approx 1/0.0228 \approx 44.$$

Similarmente, cuando

$$\theta^* = \theta_0 + 2\tau_0,$$

se tiene que  $c = 2$ , de manera que

$$p = \Phi(c - 3) + \Phi(-3 - c) \approx \Phi(-1) = 0.15866,$$

y entonces,

$$\mathbf{LPC}(\theta^*) = 1/0.15866 \approx 6.$$

Luego, la regla  $\mathbf{RP}_1$  toma en promedio sólo seis revisiones para detectar un cambio de dos desviaciones estándar en la media, mientras que el número esperado de revisiones para percibir un cambio de una desviación estándar es 44.  $\square$

## La Segunda Regla de Paro

Considere la regla  $\mathbf{RP}_2$ , de acuerdo a la cual se declara que el rasgo de interés ha alterado su valor esperado cuando dos puntos consecutivos se ubican fuera de la franja de advertencia. Defina

$$\mathcal{A}_2 = \{(x, y) | \theta_0 - 2\tau_0 \leq y \leq \theta_0 + 2\tau_0\} = \{(x, y) | \ell \leq u \leq u\},$$

y

$$p_{\mathcal{A}_2} = p_{\mathcal{A}_2}(\theta^*) = P_{\theta^*}[(i, Y_i) \in \mathcal{A}_2] = P_{\theta^*}[\ell \leq Y_i \leq u]. \quad (4.1)$$

La región  $\mathcal{A}_2$  se piensa como la zona en que los datos marcados se ubicarán ‘normalmente’. La regla  $\mathbf{RP}_2$  puede describirse como sigue: Declarar que el parámetro ha cambiado la primera vez en que se observe que  $Y_{i-1} \notin \mathcal{A}_2$  y  $Y_i \notin \mathcal{A}_2$ . Para determinar  $\mathbf{LPC}$ , es conveniente introducir la siguiente notación:  $C_k$  denota ‘el estado’ en el que se tienen  $k$  puntos consecutivos fuera de  $\mathcal{A}_2$  desde el último momento en que se observó un punto dentro de  $\mathcal{A}_2$ ; desde luego,  $E_{\theta^*}[N|C_k]$  es la esperanza condicional de  $N$  dado que se tienen acumuladas  $k$  observaciones fuera de  $\mathcal{A}_2$ . Observe que

$$\mathbf{LPC}(\theta^*) = E_{\theta^*}[N|C_0],$$

pues una corrida se cuenta a partir de un momento ‘normal’, y que

$$E_{\theta^*}[N|C_2] = 0,$$

pues al acumular dos datos consecutivos fuera de  $\mathcal{A}_2$  se emite la señal de revisar el proceso. Considere ahora los siguientes casos que pueden presentarse en el momento de seleccionar las muestras conforme se desarrolla el proceso:

**Caso 1.** Se tienen acumuladas cero observaciones fuera de la franja  $\mathcal{A}_2$ , esto es, se está observando el estado  $C_0$ . En esta situación, se extrae la muestra y se calcula su media. Esta última puede caer dentro de  $\mathcal{A}_2$  con probabilidad  $p_{\mathcal{A}_2}(\theta^*)$ , aumentando en 1 la longitud de la corrida, y dejando en cero el número de observaciones

acumuladas fuera de  $\mathcal{A}_2$ , de manera que al realizar la siguiente inspección se enfrentará la misma situación. Por otro lado, la media observada puede caer fuera de  $\mathcal{A}_2$  con probabilidad  $1 - p_{\mathcal{A}_2}(\theta^*)$ , incrementando en uno la longitud de la corrida y provocando que la siguiente inspección se realice teniendo una observación acumulada fuera de  $\mathcal{A}_2$ , esto es, ante el estado  $C_1$ . Luego,

$$\begin{aligned} E_{\theta^*}[N|C_0] &= (1 + E_{\theta^*}[N|C_0])p_{\mathcal{A}_2}(\theta^*) + (1 + E_{\theta^*}[N|C_1])(1 - p_{\mathcal{A}_2}(\theta^*)) \\ &= 1 + E_{\theta^*}[N|C_0]p_{\mathcal{A}_2}(\theta^*) + E_{\theta^*}[N|C_1](1 - p_{\mathcal{A}_2}(\theta^*)) \\ &= 1 + E_{\theta^*}[N|C_0]p_{\mathcal{A}_2}(\theta^*) + E_{\theta^*}[N|C_1](1 - p_{\mathcal{A}_2}(\theta^*)) \end{aligned} \quad (4.2)$$

**Caso 2.** Ahora suponga que se inicia la inspección teniendo una observación acumulada fuera de la franja  $\mathcal{A}_2$ , esto es, ante el estado  $C_1$ . En este caso, se extrae la muestra y se calcula su media; si ésta se ubica dentro de  $\mathcal{A}_2$ , entonces se incrementa en uno la longitud de la corrida y en la siguiente extracción se estará ante el estado  $C_0$ . Por otro lado, si la media observada cae fuera de  $\mathcal{A}_2$ , entonces se aumenta en uno la longitud de la corrida, pero se declara la señal de revisión, pues ya se tendrán acumulados dos puntos fuera de la franja de advertencia  $\mathcal{A}_2$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} E_{\theta^*}[N|C_1] &= (1 + E_{\theta^*}[N|C_0])p_{\mathcal{A}_2}(\theta^*) + 1 \times (1 - p_{\mathcal{A}_2}(\theta^*)) \\ &= 1 + E_{\theta^*}[N|C_0]p_{\mathcal{A}_2}(\theta^*) \end{aligned} \quad (4.3)$$

A partir de estas igualdades puede despejarse  $E[N|C_0]$ . Con este propósito, observe que (4.2) puede escribirse equivalentemente como

$$E_{\theta^*}[N|C_0](1 - p_{\mathcal{A}_2}(\theta^*)) = 1 + E_{\theta^*}[N|C_1](1 - p_{\mathcal{A}_2}(\theta^*)),$$

y reemplazando la expresión para  $E_{\theta^*}[N|C_1]$  obtenida en (4.3) se arriba a

$$\begin{aligned} E_{\theta^*}[N|C_0](1 - p_{\mathcal{A}_2}(\theta^*)) &= 1 + (1 + E_{\theta^*}[N|C_0]p_{\mathcal{A}_2}(\theta^*))(1 - p_{\mathcal{A}_2}(\theta^*)) \\ &= 1 + (1 - p_{\mathcal{A}_2}(\theta^*)) + E_{\theta^*}[N|C_0]p_{\mathcal{A}_2}(\theta^*)(1 - p_{\mathcal{A}_2}(\theta^*)) \end{aligned}$$

y entonces

$$E_{\theta^*}[N|C_0] = \frac{2 - p_{\mathcal{A}_2}(\theta^*)}{(1 - p_{\mathcal{A}_2}(\theta^*))^2} = \frac{1}{1 - p_{\mathcal{A}_2}(\theta^*)} + \frac{1}{(1 - p_{\mathcal{A}_2}(\theta^*))^2}. \quad (4.4)$$

Este argumento establece el siguiente resultado.

**Teorema 4.1.** Para la regla  $\mathbf{RP}_2$ , la longitud promedio de una corrida es

$$\mathbf{LPC}(\theta^*) = \frac{1}{1 - p_{\mathcal{A}_2}(\theta^*)} + \frac{1}{(1 - p_{\mathcal{A}_2}(\theta^*))^2},$$

donde  $p_{\mathcal{A}_2}(\theta^*)$  está dado por la ecuación (4.1), esto es,

$$p_{\mathcal{A}_2} = p_{\mathcal{A}_2}(\theta^*) = P_{\theta^*}[(i, Y_i) \in \mathcal{A}c_2] = P_{\theta^*}[\ell \leq Y_i \leq u].$$

**Ejemplos.** Note que a partir de la definición de  $p_{\mathcal{A}_2}(\theta^*)$ , esta cantidad puede expresarse en términos de la distribución normal estándar:

$$\begin{aligned} p_{\mathcal{A}_2}(\theta^*) &= P_{\theta^*}[Y_i \notin [\ell, u]] \\ &= 1 - P_{\theta^*}[Y_i \in [\ell, u]] \\ &= 1 - P_{\theta^*}[Y_i \in [\theta_0 - 2\tau_0, \theta_0 + 2\tau_0]] \\ &= 1 - P_{\theta^*}\left[-2 + \frac{\theta_0 - \theta^*}{\tau_0} < \frac{Y_i - \theta^*}{\tau_0} < 2 + \frac{\theta_0 - \theta^*}{\tau_0}\right] \\ &= 1 - \left[\Phi\left(2 + \frac{\theta_0 - \theta^*}{\tau_0}\right) - \Phi\left(-2 + \frac{\theta_0 - \theta^*}{\tau_0}\right)\right] \end{aligned}$$

Luego, si  $\theta^* = \theta_0 + c\tau_0$ , entonces

$$\begin{aligned} p_{\mathcal{A}_2}(\theta^*) &= 1 - \left[\Phi\left(2 + \frac{\theta_0 - \theta^*}{\tau_0}\right) - \Phi\left(-2 + \frac{\theta_0 - \theta^*}{\tau_0}\right)\right] \\ &= 1 - [\Phi(2 - c) - \Phi(-2 - c)] \\ &= [1 - \Phi(2 - c)] + \Phi(-2 - c) \\ &= \Phi(c - 2) + \Phi(-2 - c) \end{aligned}$$

Por ejemplo, si  $\theta^* = \theta_0 + \tau_0$ , entonces  $p_{\mathcal{A}_2}(\theta^*) = \Phi(-1) + \Phi(-3) = 0.15866 + 0.00270 = .16136$ . Luego,

$$\mathbf{LPC}(\theta_0 + \tau_0) = \frac{1}{1 - .16136} + \frac{1}{(1 - .16136)^2} = 2.614241.$$

Similarmente, si  $\theta^* = \theta_0 + 2\tau_0$ , entonces  $p_{\mathcal{A}_2}(\theta^*) = \Phi(0) + \Phi(-4) \approx 0.50000$ , de manera que

$$\mathbf{LPC}(\theta_0 + 2\tau_0) \approx \frac{1}{1 - 0.5000} + \frac{1}{(1 - 0.5000)^2} = 6.$$

□

El argumento que condujo a la determinación de la longitud promedio de una corrida para la regla  $\mathbf{RP}_2$ , puede generalizarse a cualquier regla que estipule la revisión del proceso cuando un cierto número  $m$  de medias consecutivas se ubican en una región determinada  $\mathcal{W}^*$ , cuya forma explícita depende de la regla de paro específica que se considere. La zona  $\mathcal{W}^*$  se conoce como la región de advertencia de la regla, mientras que  $\mathcal{A}^* = \mathcal{W}^{*c}$ , el complemento de  $\mathcal{W}^*$ , es la zona de aceptación. En este caso, es necesario considerar los estados  $C_0, C_1, \dots, C_{m-1}$ , donde  $C_i$  representa que el número de medias que se ubican en  $\mathcal{W}^*$  desde que se marco la última media en la zona de aceptación. La longitud esperada de una corrida es  $\mathbf{LPC}(\theta) = E_\theta[N|C_0]$ , y usando la notación

$$p_{\mathcal{A}^*}(\theta) = P_\theta[Y_i \in \mathcal{A}^*], \quad y \quad p_{\mathcal{W}^*}(\theta) = P_\theta[Y_i \in \mathcal{W}^*],$$

el siguiente Teorema describe un sistema de ecuaciones que produce a  $\mathbf{LPC}(\theta)$  como parte de sus soluciones.

**Teorema 4.2.** Considere una regla de paro que especifica revisar el proceso productivo cuando  $m$  medias consecutivas se ubican en una región (de advertencia)  $\mathcal{W}^*$ , y sea  $E[N|C_k]$  el valor esperado del número de inspecciones que se reliazarán cuando se han acumulado  $k$  observaciones consecutivas en  $\mathcal{W}^*$  desde la última marca trazada en la zona de aceptación  $\mathcal{A}^* = \mathcal{W}^{*c}$ . En este caso, para cada  $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$ , se tiene que

$$E[N|C_k] = 1 + p_{\mathcal{A}^*} E_\theta[N|C_0] + p_{\mathcal{W}^*} E_\theta[N|C_{k+1}],$$

donde  $E_{\theta}[N|C_m] = 0$ .

Este resultado puede establecerse siguiendo una ruta análoga a la seguida para demostrar el Teorema 4.1.

## Una Regla de Paro Combinada

El propósito de esta sección es ilustrar el procedimiento basado en esperanzas condicionales para evaluar el índice de funcionamiento de una corrida para una regla combinada. La norma de actuación que se considerará combina las reglas  $\mathbf{RP}_1$  y  $\mathbf{RP}_2$  descritas en la Sección 2, las cuales son frecuentemente utilizadas:

$\mathbf{RP}_{1-2}$ : El proceso no está bajo control estadístico si se encuentra un punto fuera de los límites de control tres sigma, o dos marcas consecutivas se ubican en la franja de advertencia.

Para determinar  $\mathbf{LPC}(\theta)$ , es conveniente introducir una notación adecuada. Primero observe que para la regla  $\mathbf{RP}_{1-2}$ , 'la zona normal' (o de aceptación) en el gráfico de control está determinada por

$$\mathcal{A}^* = \{(x, y) | \ell \leq y \leq u\}, \quad (5.1)$$

la zona de advertencia se denotará por

$$\mathcal{W}^* = \{(x, y) | L \leq y < \ell, \text{ o } u < y \leq U\}, \quad (5.2)$$

mientras que la zona de rechazo se define por

$$\mathcal{R}^* = \{(x, y) | y < L \text{ o } y > U\}; \quad (5.3)$$

para las definiciones de los límites  $L$ ,  $U$ ,  $\ell$  y  $u$  vea (2.1) y (2.5). Las probabilidades de que la marca asociada a una media muestral pertenezca a una de estas zonas están dadas por

$$\begin{aligned} p_{\mathcal{A}^*}(\theta) &= P_{\theta}[(i, Y_i) \in \mathcal{A}^*] = P_{\theta}[\ell \leq Y_i \leq u] \\ p_{\mathcal{W}^*}(\theta) &= P_{\theta}[(i, Y_i) \in \mathcal{W}^*] = P_{\theta}[L \leq Y_i < \ell, \text{ o } u < Y_i \leq U] \\ p_{\mathcal{R}^*}(\theta) &= P_{\theta}[(i, Y_i) \in \mathcal{R}^*] = P_{\theta}[Y_i < L, \text{ o } Y_i > U] \end{aligned} \quad (5.4)$$



**Teorema 5.1.** Bajo la regla combinada  $\mathbf{RP}_{1-2}$ , la longitud esperada de una corrida está dada por

$$\mathbf{LPC}(\theta) = \frac{1 + p_{\mathcal{W}^*}(\theta)}{1 - p_{\mathcal{A}^*}(\theta)(1 + p_{\mathcal{W}^*}(\theta))}.$$

**Demostración.** Denote mediante  $C_k$  al estado en el cual hay  $k$  puntos de advertencia acumulados en forma consecutiva después de la última ocasión en que se registra una marca en la zona de aceptación. Entonces, usando un argumento de esperanza condicional similar al empleado en la Sección 4, se obtiene que al empezar en el estado  $C_0$

$$E_{\theta}[N|C_0] = 1 \times p_{\mathcal{R}^*}(\theta) + (1 + E_{\theta}[N|C_0])p_{\mathcal{A}^*}(\theta) + (1 + E_{\theta}[N|C_1])p_{\mathcal{W}^*}(\theta).$$

Similarmente, iniciando en el estado  $C_1$

$$E_{\theta}[N|C_1] = 1 \times p_{\mathcal{R}^*}(\theta) + (1 + E_{\theta}[N|C_0])p_{\mathcal{A}^*}(\theta) + (1 + E_{\theta}[N|C_2])p_{\mathcal{W}^*}(\theta).$$

Observando que  $p_{\mathcal{A}^*}(\theta) + p_{\mathcal{W}^*}(\theta) + p_{\mathcal{R}^*}(\theta) = 1$  (lo cual se desprende de (5.4)), y que  $E_{\theta}[N|C_2] = 0$ , pues la regla estipula que al tener dos puntos acumulados en  $\mathcal{W}^*$  el proceso se revise, las dos últimas igualdades desplegadas implican

$$E_{\theta}[N|C_0][1 - p_{\mathcal{A}^*}(\theta)] = 1 + p_{\mathcal{W}^*}(\theta)E_{\theta}[N|C_1],$$

$$E_{\theta}[N|C_1] = 1 + p_{\mathcal{A}^*}(\theta)E_{\theta}[N|C_0],$$

y reemplazando la expresión para  $E_{\theta}[N|C_1]$  en la primera de estas ecuaciones, se obtiene

$$E_{\theta}[N|C_0][1 - p_{\mathcal{A}^*}(\theta)] = 1 + p_{\mathcal{W}^*}(\theta) + p_{\mathcal{W}^*}(\theta)p_{\mathcal{A}^*}(\theta)E_{\theta}[N|C_0],$$

de manera que

$$E_{\theta}[N|C_0] = \frac{1 + p_{\mathcal{W}^*}(\theta)}{1 - p_{\mathcal{A}^*}(\theta) - p_{\mathcal{A}^*}(\theta)p_{\mathcal{W}^*}(\theta)} = \frac{1 + p_{\mathcal{W}^*}(\theta)}{1 - p_{\mathcal{A}^*}(\theta)(1 + p_{\mathcal{W}^*}(\theta))}$$

y la conclusión se obtiene observando que  $\mathbf{LPC}(\theta) = E_{\theta}[N|C_0]$ .  $\square$

## La Regla $\mathbf{RP}_{1-m}$

En esta sección se determina la longitud promedio de una corrida para una regla de paro que generaliza a  $\mathbf{RP}_{1-2}$ . Dicha norma para tomar decisiones es la regla  $\mathbf{RP}_{1-m}$ , descrita a continuación.

$\mathbf{RP}_{1-m}$ : El proceso se declara fuera de control estadístico si se encuentra un punto en la zona de rechazo o  $m$  puntos consecutivos en región de advertencia.

Note que las zona de rechazo y de advertencia a las que se refiere esta regla están dadas por (5.3) y (5.2), respectivamente, y que  $\mathcal{A}^*$  en (5.1) es la zona de aceptación, la cual es la región donde se considera como ‘normal’ que se ubiquen las medias muestrales observadas. Como en las secciones precedentes, sea  $C_k$  el estado en el cual hay  $k$  puntos acumulados consecutivamente en la zona de advertencia, y observe que mediante un argumento de esperanza condicional similar al utilizado en las secciones precedentes se obtiene que para  $k = 1, 2, \dots, m - 1$ ,

$$E_{\theta}[N|C_k] = 1 \times p_{\mathcal{R}^*}(\theta) + (1 + E_{\theta}[N|C_0])p_{\mathcal{A}^*}(\theta) + (1 + E_{\theta}[N|C_{k+1}])p_{\mathcal{W}^*}(\theta). \quad (6.1)$$

Note que en el caso presente

$$E_{\theta}[N|C_m] = 0,$$

pues la regla emite la señal de revisión cuando se tienen  $m$  puntos consecutivos en la zona de advertencia. Observe, además, que debido a (5.4),

$$p_{\mathcal{A}^*}(\theta) + p_{\mathcal{W}^*}(\theta) + p_{\mathcal{R}^*}(\theta) = 1.$$

En el siguiente teorema se determina  $E_{\theta}[N|C_k]$  para todo  $k = 1, 2, \dots, m - 1$ .

**Teorema 6.1.** Bajo la regla  $\mathbf{RP}_{1-m}$  las siguientes conclusiones (i) y (ii) son válidas.

(i) La longitud promedio de una corrida está dada por

$$\mathbf{LPC}(\theta) = E_{\theta}[N|C_0] = \frac{1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^m}{1 - p_{\mathcal{A}^*}(\theta) - p_{\mathcal{W}^*}(\theta) + p_{\mathcal{A}^*}(\theta)p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^m}. \quad (6.2)$$

Más aún,

(ii) Para  $k = 1, 2, \dots, m - 1$

$$E_{\theta}[N|C_k] = \frac{1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^{m-k}}{1 - p_{\mathcal{A}^*}(\theta) - p_{\mathcal{W}^*}(\theta) + p_{\mathcal{A}^*}(\theta)p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^m}. \quad (6.3)$$

Antes de demostrar este resultado, es interesante verificar si, para  $m = 2$ , el valor de  $\mathbf{LPC}(\theta)$  en (6.2) coincide con el obtenido en el Teorema 5.1 para la regla  $\mathbf{RP}_{1-2}$ . Para  $m = 2$ , el Teorema 6.1(i) implica

$$\begin{aligned} \mathbf{LPC}(\theta) &= E_{\theta}[N|C_0] \\ &= \frac{1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^2}{1 - p_{\mathcal{A}^*}(\theta) - p_{\mathcal{W}^*}(\theta) + p_{\mathcal{A}^*}(\theta)p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^2} \\ &= \frac{1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^2}{(1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta)) - p_{\mathcal{A}^*}(\theta)(1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^2)} \\ &= \frac{(1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta))(1 + p_{\mathcal{W}^*}(\theta))}{(1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta)) - p_{\mathcal{A}^*}(\theta)(1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta))(1 + p_{\mathcal{W}^*}(\theta))} \\ &= \frac{(1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta))(1 + p_{\mathcal{W}^*}(\theta))}{(1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta))[1 - p_{\mathcal{A}^*}(\theta)(1 + p_{\mathcal{W}^*}(\theta))]} \end{aligned}$$

y cancelando el factor común  $(1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta))$  en este cociente, se llega a la expresión

$$\mathbf{LPC}(\theta) = \frac{1 + p_{\mathcal{W}^*}(\theta)}{1 - p_{\mathcal{A}^*}(\theta)(1 + p_{\mathcal{W}^*}(\theta))}$$

la cual coincide con la obtenida en el Teorema 5.1.

**Demostración del Teorema 6.1.** Como punto de partida, observe que debido a la igualdad  $p_{\mathcal{R}^*}(\theta) + p_{\mathcal{A}^*}(\theta) + p_{\mathcal{W}^*}(\theta) = 1$ , la ecuación (6.1) es equivalente a

$$E_{\theta}[N|C_k] = 1 + E_{\theta}[N|C_0]p_{\mathcal{A}^*}(\theta) + E_{\theta}[N|C_{k+1}]p_{\mathcal{W}^*}(\theta), \quad k = 0, 1, 2, \dots, m - 1, \quad (6.4)$$

relación que en forma desarrollada se expresa como

$$\begin{aligned}
 E_{\theta}[N|C_0] &= 1 + p_{\mathcal{A}^*}(\theta)E_{\theta}[N|C_0] + p_{\mathcal{W}^*}(\theta)E_{\theta}[N|C_1] \\
 E_{\theta}[N|C_1] &= 1 + p_{\mathcal{A}^*}(\theta)E_{\theta}[N|C_0] + p_{\mathcal{W}^*}(\theta)E_{\theta}[N|C_2] \\
 E_{\theta}[N|C_2] &= 1 + p_{\mathcal{A}^*}(\theta)E_{\theta}[N|C_0] + p_{\mathcal{W}^*}(\theta)E_{\theta}[N|C_3] \\
 &\vdots \\
 E_{\theta}[N|C_{m-1}] &= 1 + p_{\mathcal{A}^*}(\theta)E_{\theta}[N|C_0] + p_{\mathcal{W}^*}(\theta)E_{\theta}[N|C_m]
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Para demostrar la parte (i), el primer paso es observar que a partir de (6.4) se desprende que

$$E_{\theta}[N|C_k] - E_{\theta}[N|C_{k-1}] = p_{\mathcal{W}^*}(\theta)[E_{\theta}[N|C_{k+1}] - E_{\theta}[N|C_k]], \quad k = 1, 2, \dots, m-1, \tag{6.6}$$

relaciones que equivalen a

$$\begin{aligned}
 E_{\theta}[N|C_1] - E_{\theta}[N|C_0] &= p_{\mathcal{W}^*}(\theta)[E_{\theta}[N|C_2] - E_{\theta}[N|C_1]] \\
 E_{\theta}[N|C_2] - E_{\theta}[N|C_1] &= p_{\mathcal{W}^*}(\theta)[E_{\theta}[N|C_3] - E_{\theta}[N|C_2]] \\
 E_{\theta}[N|C_3] - E_{\theta}[N|C_2] &= p_{\mathcal{W}^*}(\theta)[E_{\theta}[N|C_4] - E_{\theta}[N|C_3]] \\
 &\vdots \\
 E_{\theta}[N|C_{m-1}] - E_{\theta}[N|C_{m-2}] &= p_{\mathcal{W}^*}(\theta)[E_{\theta}[N|C_m] - E_{\theta}[N|C_{m-1}]]
 \end{aligned}$$

A partir de estas ecuaciones se concluye que para  $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$ ,

$$E_{\theta}[N|C_k] - E_{\theta}[N|C_{k-1}] = p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^{m-k}[E_{\theta}[N|C_m] - E_{\theta}[N|C_{m-1}]],$$

y dado que  $E_{\theta}[N|C_m] = 0$  se obtiene

$$E_{\theta}[N|C_k] - E_{\theta}[N|C_{k-1}] = -p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^{m-k}E_{\theta}[N|C_{m-1}]. \tag{6.7}$$

Luego,

$$\sum_{k=1}^m [E_{\theta}[N|C_k] - E_{\theta}[N|C_{k-1}]] = -\sum_{k=1}^m p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^{m-k}E_{\theta}[N|C_{m-1}]. \tag{6.8}$$

Note ahora que la suma en el lado izquierdo se escribe en forma desarrollada como

$$E_{\theta}[N|C_1] - E_{\theta}[N|C_0] + E_{\theta}[N|C_2] - E_{\theta}[N|C_1] + \cdots + E_{\theta}[N|C_m] - E_{\theta}[N|C_{m-1}],$$

expresión en la que se cancelan todos los términos, excepto el primero y el último, lo cual produce una simplificación importante, reduciéndose a la siguiente diferencia:

$E_{\theta}[N|C_m] - E_{\theta}[N|C_0]$ . Por lo tanto, (6.8) equivale a

$$E_{\theta}[N|C_m] - E_{\theta}[N|C_0] = -E_{\theta}[N|C_{m-1}] \sum_{k=1}^m p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^{m-k} \quad (6.9)$$

La sumatoria en el lado derecho de esta igualdad contiene términos que decrecen geoméricamente, y a continuación se presenta el argumento clásico para su evaluación (Iarson y Hostetler, 1982): Defina

$$S_m = \sum_{k=1}^m p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^{m-k} = p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^0 + p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^1 + \cdots + p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^{m-1}.$$

Multiplicando ambos lados de esta relación por  $p_{\mathcal{W}^*}(\theta)$  se obtiene

$$p_{\mathcal{W}^*}(\theta)S_m = p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^1 + p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^2 + \dots + p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^m,$$

y tomando la diferencia de los correspondientes lados de estas dos últimas igualdades, se desprende que

$$(1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta))S_m = p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^0 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^m = 1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^m,$$

de donde  $S_m$  puede despejarse para obtener

$$S_m = \frac{1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^m}{1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta)}.$$

Sustituyendo este resultado en (6.9), y recordando que  $E_{\theta}[N|C_m] = 0$ , se arriba a la siguiente expresión:

$$E_{\theta}[N|C_0] = E_{\theta}[N|C_{m-1}] \left[ \frac{1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^m}{1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta)} \right].$$

Relacionando esta igualdad con la última ecuación de (6.5) se llega a una ecuación que sólo contiene una esperanza condicional:

$$E_{\theta}[N|C_{m-1}] = 1 + p_{\mathcal{A}^*}(\theta) \left[ E_{\theta}[N|C_{m-1}] \left( \frac{1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^m}{1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta)} \right) \right],$$

de donde  $E_{\theta}[N|C_{m-1}]$  puede despejarse por medio de los siguientes pasos: Primero se transpone el término en el lado derecho para obtener

$$E_{\theta}[N|C_{m-1}] \left[ 1 - \frac{p_{\mathcal{A}^*}(\theta)(1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^m)}{1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta)} \right] = 1,$$

y entonces

$$E_{\theta}[N|C_{m-1}] = \frac{1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta)}{1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta) - p_{\mathcal{A}^*}(\theta)(1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^m)}. \quad (6.10)$$

Ahora combine esta igualdad con la última ecuación en (6.5) y recuerde que

$$E_{\theta}[N|C_m] = 0$$

para concluir que

$$\begin{aligned} E_{\theta}[N|C_0] &= \frac{E_{\theta}[N|C_{m-1}] - 1}{p_{\mathcal{A}^*}(\theta)} \\ &= \frac{\frac{1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta)}{1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta) - p_{\mathcal{A}^*}(\theta)(1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^m)} - 1}{p_{\mathcal{A}^*}(\theta)} \\ &= \frac{1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta) - 1 + p_{\mathcal{W}^*}(\theta) + p_{\mathcal{A}^*}(\theta)(1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^m)}{1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta) - p_{\mathcal{A}^*}(\theta)(1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^m)} \\ &= \frac{p_{\mathcal{A}^*}(\theta)(1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^m)}{p_{\mathcal{A}^*}(\theta)(1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta) - p_{\mathcal{A}^*}(\theta)(1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^m))}, \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{LPC}(\theta) &= E_{\theta}[N|C_0] \\ &= \frac{p_{\mathcal{A}^*}(\theta)(1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^m)}{p_{\mathcal{A}^*}(\theta)(1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta) - p_{\mathcal{A}^*}(\theta)(1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^m))} \\ &= \frac{1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^m}{1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta) - p_{\mathcal{A}^*}(\theta)(1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^m)} \end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtuvo cancelando el factor común  $p_{\mathcal{A}^*}(\theta)$ . Este argumento establece la parte (i).

(ii) Para abordar la demostración de esta segunda parte, considere las igualdades presentadas en (6.6) y (6.7) las que por conveniencia se reproducen a continuación:

Para  $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$ ,

$$E_{\theta}[N|C_k] - E_{\theta}[N|C_{k-1}] = p_{\mathcal{W}^*}(\theta)[E_{\theta}[N|C_{k+1}] - E_{\theta}[N|C_k]],$$

$$E_{\theta}[N|C_k] - E_{\theta}[N|C_{k-1}] = -p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^{m-k} E_{\theta}[N|C_{m-1}].$$

A partir de estas ecuaciones se obtiene

$$-p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^{m-k} E_{\theta}[N|C_{m-1}] = p_{\mathcal{W}^*}(\theta)[E_{\theta}[N|C_{k+1}] - E_{\theta}[N|C_k]],$$

y recurriendo a la solución encontrada en (6.10), es decir,

$$E_{\theta}[N|C_{m-1}] = \frac{1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta)}{1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta) - p_{\mathcal{A}^*}(\theta)(1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^m)},$$

se desprende, después de una sustitución, la siguiente igualdad:

$$-p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^{m-k} \left( \frac{1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta)}{1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta) - p_{\mathcal{A}^*}(\theta) + p_{\mathcal{A}^*}(\theta)p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^m} \right) \quad (6.11)$$

$$= p_{\mathcal{W}^*}(\theta)[E_{\theta}[N|C_{k+1}] - E_{\theta}[N|C_k]].$$

Ahora despeje  $E_{\theta}[N|C_{k+1}]$  de la ecuación (6.4) para llegar a

$$E_{\theta}[N|C_{k+1}] = \frac{E_{\theta}[N|C_k] - 1 - p_{\mathcal{A}^*}(\theta)E_{\theta}[N|C_0]}{p_{\mathcal{W}^*}(\theta)},$$

igualdad que combinada con (6.11) implica

$$-p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^{m-k} \left( \frac{1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta)}{1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta) - p_{\mathcal{A}^*}(\theta) + p_{\mathcal{A}^*}(\theta)p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^m} \right) \\ = p_{\mathcal{W}^*}(\theta) \left[ \frac{E_{\theta}[N|C_k] - 1 - p_{\mathcal{A}^*}(\theta)E_{\theta}[N|C_0]}{p_{\mathcal{W}^*}(\theta)} - E_{\theta}[N|C_k] \right]$$

$$= E_{\theta}[N|C_k] - 1 - p_{\mathcal{A}^*}(\theta)E_{\theta}[N|C_0] - p_{\mathcal{W}^*}(\theta)E_{\theta}[N|C_k]$$

$$= E_{\theta}[N|C_k][1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta)] - 1 - p_{\mathcal{A}^*}(\theta)E_{\theta}[N|C_0].$$

A continuación sustituya en esta igualdad el valor para  $E_\theta[N|C_0]$  que se determinó en la parte (i), para llegar a

$$\begin{aligned} & -p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^{m-k} \left( \frac{1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta)}{1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta) - p_{\mathcal{A}^*}(\theta) + p_{\mathcal{A}^*}(\theta)p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^m} \right) \\ & = E_\theta[N|C_k][1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta)] \\ & \quad - 1 - p_{\mathcal{A}^*}(\theta) \left( \frac{1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^m}{1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta) - p_{\mathcal{A}^*}(\theta) + p_{\mathcal{A}^*}(\theta)p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^m} \right), \end{aligned}$$

y después de una transposición se sigue que

$$\begin{aligned} & -p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^{m-k} \left( \frac{1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta)}{1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta) - p_{\mathcal{A}^*}(\theta) + p_{\mathcal{A}^*}(\theta)p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^m} \right) \\ & \quad + 1 + p_{\mathcal{A}^*}(\theta) \left( \frac{1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^m}{1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta) - p_{\mathcal{A}^*}(\theta) + p_{\mathcal{A}^*}(\theta)p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^m} \right) \\ & = E_\theta[N|C_k][1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta)]. \end{aligned}$$

Reduciendo términos se obtiene

$$\begin{aligned} & E_\theta[N|C_k][1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta)] \\ & = \frac{-p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^{m-k}(1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta))}{1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta) - p_{\mathcal{A}^*}(\theta) + p_{\mathcal{A}^*}(\theta)p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^m} \\ & \quad + \frac{1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta) - p_{\mathcal{A}^*}(\theta) + p_{\mathcal{A}^*}(\theta)p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^m + p_{\mathcal{A}^*}(\theta) - p_{\mathcal{A}^*}(\theta)p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^m}{1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta) - p_{\mathcal{A}^*}(\theta) + p_{\mathcal{A}^*}(\theta)p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^m} \\ & = \frac{(1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta))[1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^{m-k}]}{1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta) - p_{\mathcal{A}^*}(\theta) + p_{\mathcal{A}^*}(\theta)p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^m}, \end{aligned}$$

y después de dividir ambos lados de esta igualdad por  $[1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta)]$  se concluye que para  $k = 1, 2, \dots, m - 1$

$$E_\theta[N|C_k] = \frac{1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^{m-k}}{1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta) - p_{\mathcal{A}^*}(\theta) + p_{\mathcal{A}^*}(\theta)p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^m},$$



lo cual demuestra la parte (ii) y finaliza la demostración del Teorema 6.1.  $\square$

## Conclusión

En este capítulo se han estudiado estrategias, denominadas reglas o normas de paro, que el analista puede utilizar para decidir el momento en el que se revisará el proceso productivo. Dichas normas emplean la información contenida en el gráfico de control, y se prestó especial atención al problema de determinar el índice de funcionamiento conocido como longitud promedio de una corrida (**LPC**). De acuerdo a esta medida, la bondad de una regla de paro se juzga por el valor esperado del número de inspecciones que se realizarán antes de detectar que un cambio en el parámetro de interés ha ocurrido. A pesar de que la definición original del índice **LPC** involucra la distribución de probabilidad de la longitud  $N$  de una corrida, se aplicó un método indirecto, basado en argumentos de esperanza condicional, que permitió determinar el indicador **LPC** sin conocer la distribución de  $N$ . La idea detrás del método utilizado en las Secciones 3–6, la cual ha sido extensivamente aplicada en el área de *programación dinámica* (Sennott, 1998), consiste en determinar la situación que enfrentará el observador en la siguiente inspección, dependiendo de los resultados observados para la muestra actual.

# ENFOQUE MATRICIAL

En este capítulo se complementa y extiende la discusión sobre la regla combinada  $\mathbf{RP}_{1-m}$  considerada anteriormente. El objetivo es mostrar que el sistema de ecuaciones lineales que determina la longitud esperada de una corrida tiene solución única, y poner de relieve que dicho sistema determina el índice de funcionamiento de normas de paro más generales.

## Introducción

En este capítulo se estudia un sistema auxiliar de ecuaciones lineales, a través del cual puede determinarse la longitud promedio de una corrida para una norma de paro general, la cual incluye a aquéllas que han sido consideradas previamente. En el desarrollo subsecuente, se utilizará la siguiente convención sobre vectores y matrices  $n$ -dimensionales. Dada una matriz  $\mathbf{A}_{n \times n}$ , sus filas y columnas se numeran empezando desde cero. Por ejemplo, si

$$\mathbf{A}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix},$$

entonces la fila cero es  $[1, 2, 3]$  y la columna dos es  $\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$ . Similarmente, las componentes de un vector de dimensión  $n$  se numeran desde cero, de manera que

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} \text{ es un vector } n\text{-dimensional típico.}$$

La exposición se ha organizado de la siguiente manera: En la Sección 2 se estudia un sistema de ecuaciones lineales con una estructura especial, y se demuestra que su solución es única calculando el determinante de la matriz del sistema. En la Sección 3 se visualiza este resultado desde la perspectiva del control estadístico de calidad, utilizándolo para determinar, de nueva cuenta, la longitud esperada de una corrida para la regla  $RP_{1-m}$ , pero ahora en base al resultado algebraico establecido. Aplicando el mismo procedimiento, en la Sección 4 se encuentra el índice de funcionamiento para una regla de paro unilateral, mientras que en la Sección 5 se describe una norma combinada general, para la cual se encuentra la fórmula que determina la longitud promedio de una corrida, unificando los diversos resultados que en esta dirección se han obtenidos en el desarrollo de este trabajo. Finalmente, el capítulo concluye con algunos comentarios breves en la Sección 5.

## Análisis Algebraico

En esta sección se estudia un sistema auxiliar de ecuaciones. El análisis que se realiza permite obtener otra demostración alternativa del Teorema 4.6.1, y posteriormente será utilizado para estudiar reglas de paro unilaterales. El punto de partida es el siguiente resultado clásico (Hoffman, 1982; Grossman, 1985; Harville, 1997).

**Lema 2.1** [Regla de Cramer]. Sean  $\mathbf{A}$  una matriz de  $n \times n$  sobre el cuerpo  $\mathcal{F}$  y

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix}$$

un vector arbitrario en  $\mathcal{F}^n$ . Considere el sistema de ecuaciones

$$\mathbf{AX} = \mathbf{Y}, \tag{2.1}$$

donde  $\mathbf{X}' = [x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$  es el vector 'incógnita' en  $\mathcal{F}^n$ . En este caso,

(a) El sistema (2.1) tiene solución única si y sólo si  $\det \mathbf{A} \neq 0$ .

Más aún,

(b) Cuando  $\det \mathbf{A} \neq 0$ , la única solución de (2.1) está dada por

$$x_j = \frac{\det \mathbf{B}_j}{\det \mathbf{A}}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad (2.2)$$

donde  $\mathbf{B}_j$  es la matriz de orden  $n \times n$  que se obtiene a partir de  $\mathbf{A}$  reemplazando su columna  $j$  por  $\mathbf{Y}$ . □

En el resto de esta sección se considerará un caso especial del sistema (2.1), en el cual la matriz  $\mathbf{A}_{n \times n}$  está dada por

$$\mathbf{A}_{n \times n} = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1-a & -b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a & 1 & -b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a & 0 & 1 & -b & \dots & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -b \\ -a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

y el vector  $\mathbf{Y}$  tiene todas sus componentes iguales a uno, i.e.,

$$\mathbf{Y} = \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

El resultado principal de esta sección es el siguiente:

**Teorema 2.1.** (i) Para la matriz  $\mathbf{A}_{n \times n}$  definida en (2.4) se tiene que

$$\det \mathbf{A} = \begin{cases} 1 - na & \text{si } b = 1 \\ \frac{1 - b - a(1 - b^n)}{1 - b} & \text{si } b \neq 1. \end{cases}$$

(ii) Si  $a$  y  $b$  son dos números positivos que satisfacen  $a + b \leq 1$ , entonces  $\det \mathbf{A} \neq 0$ .

Más aún, en este caso

(iii) La única solución al sistema  $\mathbf{AX} = \mathbf{1}$  es el vector  $\mathbf{X}$  cuyas componentes son

$$x_k = \frac{1 - b^{n-k}}{1 - b - a(1 - b^n)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

**Demostración.** (i) Para calcular el determinante de la matriz  $\mathbf{A}_{n \times n}$  se utilizará el desarrollo a través de la última fila; esta es una elección conveniente, entre otras razones, debido a que sólo dos elementos en dicha fila son no nulos, a saber, el primero (con valor  $-a$ ), y el último (cuyo valor es 1). Realizando la expansión, el coeficiente de  $-a$  es  $(-1)^{n+1}$  multiplicado por el determinante de la matriz que se obtiene eliminando la primera columna y última fila de  $\mathbf{A}$ , mientras que el coeficiente de 1 es el determinante de la matriz que resulta al eliminar la última fila y la última columna de  $\mathbf{A}$  multiplicado por  $(-1)^{n+n} = 1$ :

$$\det \mathbf{A}_{n \times n} = (-1)^{n+1}(-a) \times \det \begin{bmatrix} -b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -0 & 0 & 0 & \cdots & -b & 0 \\ -0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -b \end{bmatrix} \\ + (1) \times \det \begin{bmatrix} 1-a & -b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a & 1 & -b & \cdots & 0 & 0 \\ -a & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a & 0 & 0 & \cdots & 1 & -b \\ -a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Las dos matrices cuyo determinante aparece en el lado derecho de esta igualdad son de orden  $n-1 \times n-1$ . La primera es *triangular superior* con sus elementos diagonales iguales a  $-b$ , por lo que su determinante es  $(-b)^{n-1}$ , mientras que la segunda matriz es no es otra cosa que la versión de  $\mathbf{A}$  en (2.3) con orden  $n-1 \times n-1$ . Luego,

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A}_{n \times n} &= (-1)^{n+1}(-a) \times (-b)^{n-1} + (1) \times \det \mathbf{A}_{(n-1) \times (n-1)} \\ &= -ab^{n-1} + \det \mathbf{A}_{(n-1) \times (n-1)}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Esta ecuación permite expresar el determinante de una matriz  $\mathbf{A}$  en términos de otra matriz del mismo tipo, pero de orden menor; una fórmula de esta clase se denomina recursiva. Aplicando (2.5), pero ahora empezando con una matriz de orden  $(n-1) \times (n-1)$  se obtiene que  $\det \mathbf{A}_{(n-1) \times (n-1)} = -ab^{n-2} + \det \mathbf{A}_{(n-2) \times (n-2)}$ , y reemplazando esta expresión en (2.5) se obtiene

$$\det \mathbf{A}_{n \times n} = -ab^{n-1} - ab^{n-2} + \det \mathbf{A}_{(n-2) \times (n-2)}.$$

El mismo procedimiento se puede aplicar repetidamente para llegar a expresar  $\det \mathbf{A}_{n \times n}$  en términos de un determinante que pueda ser fácilmente calculable, digamos, hasta llegar a la expresión que involucra  $\det \mathbf{A}_{2 \times 2}$ . Haciendo esta tarea se obtiene

$$\det \mathbf{A}_{n \times n} = -ab^{n-1} - ab^{n-2} - \dots - ab^2 + \det \mathbf{A}_{2 \times 2}.$$

Observe ahora que  $\det \mathbf{A}_{2 \times 2} = \det \begin{bmatrix} 1-a & -b \\ -a & 1 \end{bmatrix} = 1 - a - ab$ , igualdad que al combinarse con la anterior ecuación implica

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A}_{n \times n} &= -ab^{n-1} - ab^{n-2} - \dots - ab^2 + [1 - a - ab] \\ &= 1 - a[b^{n-1} + b^{n-2} + \dots + b^2 + b + 1] \end{aligned} \quad (2.6)$$

A continuación, note que, para  $b = 1$ , la suma entre corchetes es  $[b^{n-1} + b^{n-2} + \dots + b^2 + b + 1] = [1 + 1 + \dots + 1 + 1] = n$ , de manera que

$$\det \mathbf{A}_{n \times n} = 1 - na, \quad \text{si } b = 1.$$

mientras que para  $b \neq 1$ , se aplica la fórmula para la adición de términos que cambian geoméricamente, obteniendo

$$[b^{n-1} + b^{n-2} + \dots + b^2 + b + 1] = \frac{1 - b^n}{1 - b}, \quad b \neq 1,$$

y entonces (2.6) implica que

$$\det \mathbf{A}_{n \times n} = 1 - a \frac{1 - b^n}{1 - b} = \frac{1 - b - a(1 - b^n)}{1 - b}, \quad \text{si } b \neq 1.$$

estableciendo la conclusión deseada.

(ii) Suponga que  $a$  y  $b$  son dos números positivos con  $a + b \leq 1$ . En este caso necesariamente se tiene que  $b < 1$ , y entonces la parte (i) implica que

$$\det \mathbf{A}_{n \times n} = 1 - a \frac{1 - b^n}{1 - b} = \frac{1 - b - a(1 - b^n)}{1 - b}.$$

Note ahora que  $a > a(1 - b^n)$  y entonces  $1 \geq b + a > b + a(1 - b^n)$ , de donde se desprende que  $1 - b - a(1 - b^n) > 0$ , de manera que el numerador en el cociente para  $\det \mathbf{A}_{n \times n}$  es no nulo, de donde se desprende que  $\det \mathbf{A}_{n \times n} \neq 0$ .

(iii) El hecho de que el vector  $\mathbf{X}$  determinado por

$$x_k = \frac{1 - b^{n-k}}{1 - b - a(1 - b^n)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

sea solución de  $\mathbf{AX} = \mathbf{1}$  puede verificarse directamente, esto es, sustituyendo los valores postulados de las componentes de  $\mathbf{X}$  en las ecuaciones del sistema  $\mathbf{AX} = \mathbf{1}$ . Otra opción, es calcular el determinante de la matriz  $\mathbf{B}_j$  y aplicar la regla de Cramer. □

En la siguiente sección, el Teorema 2.1 se utilizará para estudiar, de nueva cuenta, la norma combinada  $\mathbf{RP}_{1-m}$  introducida en el capítulo precedente.

## La Regla de Paro $\mathbf{RP}_{1-m}$ desde otra perspectiva

El Teorema 2.1 permite determinar la longitud promedio de una corrida para para la norma de paro  $\mathbf{RP}_{1-m}$  introducida en el Capítulo 4. Recuerde que, dado que se tienen  $k$  puntos consecutivos observados en la zona de advertencia, el valor esperado del número de inspecciones que se realizarán antes de emitir la señal de alerta es  $E_\theta[N|C_k]$ , y que  $E_\theta[N|C_0]$  no es otra cosa que  $\mathbf{LPC}(\theta)$ . Además,  $E[N|C_m] = 0$ , pues al acumular  $m$  puntos consecutivos en la zona de advertencia se emite la señal de revisión. En la Sección 4.6 se demostró que dichas esperanzas

condicionales satisfacen el sistema de ecuaciones lineales en la relación (4.6.5), igualdades que en notación matricial se representan como

$$\begin{bmatrix} 1 - p_{\mathcal{A}^*}(\theta) & -p_{\mathcal{W}^*}(\theta) & 0 & \dots & 0 \\ -p_{\mathcal{A}^*}(\theta) & 1 & -p_{\mathcal{W}^*}(\theta) & \dots & 0 \\ -p_{\mathcal{A}^*}(\theta) & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -p_{\mathcal{A}^*}(\theta) & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{\theta}[N|C_0] \\ E_{\theta}[N|C_1] \\ E_{\theta}[N|C_2] \\ \vdots \\ E_{\theta}[N|C_{m-1}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Para este sistema, se tiene que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 - p_{\mathcal{A}^*}(\theta) & -p_{\mathcal{W}^*}(\theta) & 0 & \dots & 0 \\ -p_{\mathcal{A}^*}(\theta) & 1 & -p_{\mathcal{W}^*}(\theta) & \dots & 0 \\ -p_{\mathcal{A}^*}(\theta) & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -p_{\mathcal{A}^*}(\theta) & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

mientras que el vector de incógnitas es

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} E_{\theta}[N|C_0] \\ E_{\theta}[N|C_1] \\ E_{\theta}[N|C_2] \\ \vdots \\ E_{\theta}[N|C_{m-1}] \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Luego, el vector de esperanzas condicionales satisface el sistema  $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{1}$ , donde la matriz  $\mathbf{A}$ , de orden  $m \times m$ , está dada en (3.1). Una comparación directa muestra que esta matriz coincide con aquella en (2.3), donde los parámetros  $a$  y  $b$  son

$$a = p_{\mathcal{A}^*}(\theta),$$

$$b = p_{\mathcal{W}^*}(\theta)$$

y, además,  $n = m$ . Observe ahora que en el contexto de la norma  $\mathbf{RP}_{1-m}$ , las probabilidades  $p_{\mathcal{A}^*}(\theta)$  y  $p_{\mathcal{W}^*}(\theta)$  están dadas por (4.5.4), y entonces son claramente positivas y satisfacen

$$p_{\mathcal{A}^*} + p_{\mathcal{W}^*} \leq 1,$$



de manera que las condiciones del Teorema 2.1(ii) se verifican, implicando que el sistema (3.1) tiene la única solución determinada por

$$\begin{aligned} E_{\theta}[N|C_k] &= x_k \\ &= \frac{1 - b^{m-k}}{1 - b - a(1 - b^n)} \\ &= \frac{1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^{m-k}}{1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta) - p_{\mathcal{A}^*}(\theta)a(1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^m)}; \end{aligned}$$

en particular, la longitud promedio de una corrida es

$$\text{LPC}(\theta) = E_{\theta}[N|C_0] = \frac{1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^m}{1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta) - p_{\mathcal{A}^*}(\theta)a(1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^m)}.$$

Note que estas conclusiones son las mismas que las contenidas en el Teorema 4.6.1, pero ahora se han deducido a partir de el resultado algebraico presentado en el Teorema 2.1. En las siguientes secciones se obtendrán otras aplicaciones a problemas que no han sido considerados hasta ahora.

## Una Regla de Paro Unilateral

En el Capítulo 4 se mencionó que una norma de paro puede ser unilateral. En ese caso, el analista está interesado en detectar desviaciones del parámetro de interés hacia un solo lado del valor original. Por ejemplo, suponga que se está interesado en percibir *incrementos del parámetro*, esto es, para el fabricante es importante darse cuenta que el valor actual del parámetro  $\theta$  es mayor que el valor original  $\theta_0$ , pero no se preocupa cuando  $\theta < \theta_0$ . Un caso práctico en el que esta situación podría presentarse, es cuando el rasgo de interés es la cantidad de contaminantes que un artículo final contiene. En este caso,  $\theta$  es el valor esperado del nivel de contaminantes de los artículos que salen al mercado, y un aumento en  $\theta$  significaría exponer al consumidor a niveles de contaminación mayores, con implicaciones negativas para su salud, y podría acarrear dificultades al fabricante ante las autoridades sanitarias. Una manera de reflejar este hecho en un sistema de inspección de los productos finales, es no preocuparse ante valores observados de

la media muestral que sean menores o iguales a  $\theta_0$ , poner atención especial cuando una media supere a  $\theta_0$  por alguna cantidad ‘moderada’, y declarar que el valor de  $\theta$  ha aumentado cuando la media muestral supere a  $\theta_0$  por alguna cantidad ‘importante’. La siguiente norma de paro está acorde con esta idea intuitiva.

**Regla de Paro  $\mathbf{RP}_{1-m}^+$** : Declarar que el valor de  $\theta$  ha aumentado, y por lo tanto revisar el proceso, cuando una media observada sea mayor a  $U = \theta_0 + 3\tau_0$ , o bien cuando  $m$  medias consecutivas se ubiquen entre  $u = \theta_0 + 2\tau_0$  y  $U$ .

Esta norma de actuación puede expresarse en términos de franjas de aceptación, advertencia o rechazo. Primero defina las regiones

$$\mathcal{A}^* = \{(x, y) \mid y \leq \theta_0 + 2\tau_0\} = \{(x, y) \mid y \leq u\}, \quad (4.1)$$

$$\mathcal{W}^* = \{(x, y) \mid \theta_0 + 2\tau_0 < y \leq \theta_0 + 3\tau_0\} = \{(x, y) \mid u < y \leq U\}, \quad (4.2)$$

y

$$\mathcal{R}^* = \{(x, y) \mid y > \theta_0 + 3\tau_0\} = \{(x, y) \mid y > U\}; \quad (4.3)$$

para las definiciones de los límites  $U$  y  $u$  vea (4.2.1) y (4.2.5). Las probabilidades de que la marca asociada a una media muestral pertenezca a una de estas zonas están dadas por

$$\begin{aligned} p_{\mathcal{A}^*}(\theta) &= P_{\theta}[(i, Y_i) \in \mathcal{A}^*] = P_{\theta}[Y_i \leq u] \\ p_{\mathcal{W}^*}(\theta) &= P_{\theta}[(i, Y_i) \in \mathcal{W}^*] = P_{\theta}[u < Y_i \leq U] \\ p_{\mathcal{R}^*}(\theta) &= P_{\theta}[(i, Y_i) \in \mathcal{R}^*] = P_{\theta}[Y_i > U] \end{aligned} \quad (4.4)$$

Con esta notación, la regla de paro  $\mathbf{RP}_{1-m}^+$  puede describirse de la siguiente manera: Declarar que el valor de  $\theta$  se incrementó cuando en el gráfico de control aparece una marca en  $\mathcal{R}^*$ , o bien cuando se observen  $m$  punto consecutivos en  $\mathcal{W}^*$ .

El siguiente objetivo es determinar la longitud promedio de una corrida para  $\mathbf{RP}_{1-m}^+$ , y para calcular  $\mathbf{LPC}(\theta)$  en este contexto, se utilizará el enfoque

de programación dinámica aplicado con éxito en el Capítulo 4. Sea  $C_k$  el estado en el cual hay  $k$  puntos acumulados consecutivamente en la zona de advertencia. Para determinar  $E_\theta[N|C_k]$ , suponga que el observador se encuentra ante el estado  $C_k$  y que va a realizar la siguiente inspección. Hay tres posibilidades que pueden presentarse:

(a) La media calculada  $Y$  es menor o igual a  $u$ . En este caso, se marcará un punto en  $\mathcal{A}^*$  (vea (4.1)), el valor de  $N$  se incrementa en uno, y en la siguiente inspección se estará ante el estado  $C_0$ . Luego,

$$E_\theta[N|C_k, Y \in \mathcal{A}^*] = 1 + E_\theta[N|C_0].$$

(b) La media calculada  $Y$  se ubica entre  $u$  y  $U$ . En esta situación, se marcará un punto en  $\mathcal{W}^*$  (por (4.2)), el valor de  $N$  se incrementará en por unidad, y en la siguiente inspección se estará ante el estado  $C_{k+1}$ . Por lo tanto,

$$E_\theta[N|C_k, Y \in \mathcal{W}^*] = 1 + E_\theta[N|C_{k+1}].$$

(c) La media calculada  $Y$  es mayor que  $U$ . En este caso, se marcará un punto en  $\mathcal{R}^*$  (vea (4.3)) declarando que el valor de  $\theta$  se ha incrementado, revisando el proceso productivo, y corrigiendo la alteración. El valor de  $N$  se incrementará en una unidad y la corrida de datos finalizará. Luego,

$$E_\theta[N|C_k, Y \in \mathcal{R}^*] = 1,$$

Las ecuaciones en (a)–(c) y el Teorema de la esperanza condicional implican que

$$\begin{aligned} E_\theta[N|C_k] &= E_\theta[N|C_k, Y \in \mathcal{A}^*]P_\theta[Y \in \mathcal{A}^*] \\ &\quad + E_\theta[N|C_k, Y \in \mathcal{W}^*]P_\theta[Y \in \mathcal{W}^*] + E_\theta[N|C_k, Y \in \mathcal{R}^*]P_\theta[Y \in \mathcal{R}^*] \\ &= (1 + E_\theta[N|C_0])p_{\mathcal{A}^*}(\theta) + (1 + E_\theta[N|C_{k+1}])p_{\mathcal{W}^*}(\theta) + (1)p_{\mathcal{R}^*}(\theta) \\ &= 1 + E_\theta[N|C_0]p_{\mathcal{A}^*}(\theta) + E_\theta[N|C_{k+1}]p_{\mathcal{W}^*}(\theta) \end{aligned}$$

donde la última igualdad utilizó que  $p_{\mathcal{R}^*}(\theta) + p_{\mathcal{W}^*}(\theta) + p_{\mathcal{A}^*}(\theta) = 1$ . Desde luego,

$$E_{\theta}[N|C_m] = 0, \quad (4.5)$$

pues la regla emite la señal de revisión cuando se tienen  $m$  puntos consecutivos en la zona de advertencia. Esta discusión puede resumirse estableciendo que para  $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$  las esperanzas condicionales  $E_{\theta}[N|C_k]$  satisfacen el sistema de ecuaciones

$$E_{\theta}[N|C_k] = 1 + E_{\theta}[N|C_0]p_{\mathcal{A}^*}(\theta) + E_{\theta}[N|C_{k+1}]p_{\mathcal{W}^*}(\theta), \quad (4.6)$$

el cual ahora debe ser familiar. Definiendo

$$a = p_{\mathcal{A}^*}(\theta), \quad b = p_{\mathcal{W}^*}(\theta), \quad \text{y} \quad x_k = E_{\theta}[N|C_k], \quad k = 0, 1, 2, \dots, m-1, \quad (4.7)$$

la igualdades (4.6) equivalen a

$$-ax_0 + x_k - bx_{k+1} = 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m-1,$$

donde  $x_m = E_{\theta}[N|C_m] = 0$ , o empleando notación matricial,

$$\begin{bmatrix} 1-a & -b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a & 1 & -b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a & 0 & 1 & -b & \cdots & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -b \\ -a & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

el cual es el sistema  $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{1}$  estudiado en la Sección 2. Observando que  $a + b \leq 1$  y que tanto  $a$  como  $b$  son positivos, se concluye, a partir del Teorema 2.1, que la única solución de estas ecuaciones está determinada por

$$x_k = \frac{1 - b^{m-k}}{1 - b - a(1 - b^m)},$$

i.e.,

$$E_{\theta}[N|C_k] = \frac{1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^{m-k}}{1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta) - p_{\mathcal{A}^*}(\theta)(1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^m)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m-1. \quad (4.8)$$

Esta discusión establece el siguiente resultado.

**Teorema 4.1.** Para la regla  $\mathbf{RP}_{1-m}^+$ , la longitud promedio de una corrida es

$$\mathbf{LPC}(\theta) = E_{\theta}[N|C_0] = \frac{1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^m}{1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta) - p_{\mathcal{A}^*}(\theta)(1 - p_{\mathcal{W}^*}(\theta)^m)},$$

donde  $p_{\mathcal{A}^*}(\theta)$  y  $p_{\mathcal{W}^*}(\theta)$  son como en (4.4).

Más generalmente, dado que se tienen  $k$  puntos acumulados en la franja de advertencia, el número esperado de inspecciones hasta que se emita la señal de revisión, es  $E_{\theta}[N|C_k]$  dado en (4.8).

**Observación 4.1.** Es importante notar que las fórmulas en los Teoremas 4.1 y 4.6.1 son formalmente las mismas. Sin embargo, las probabilidades  $p_{\mathcal{A}^*}(\theta)$  y  $p_{\mathcal{W}^*}(\theta)$  son diferentes en ambos resultados. Por ejemplo, de acuerdo al Teorema 4.2,

(a) Para a la regla unilateral  $\mathbf{RP}_{1-m}^+$ , se tiene que (vea (4.1)–(4.4))

$$p_{\mathcal{A}^*}(\theta) = P_{\theta}[Y \leq \theta_0 + 2\tau_0],$$

$$p_{\mathcal{W}^*}(\theta) = P_{\theta}[\theta_0 + 2\tau_0 < Y \leq \theta_0 + 3\tau_0],$$

mientras que,

(b) Para a la regla bilateral  $\mathbf{RP}_{1-m}$  en el Teorema 4.6.1,

$$p_{\mathcal{A}^*}(\theta) = P_{\theta}[\theta_0 - 2\tau_0 \leq Y \leq \theta_0 + 2\tau_0],$$

$$= P_{\theta}[Y \leq \theta_0 + 2\tau_0] - P_{\theta}[Y < \theta_0 - 2\tau_0]$$

y

$$p_{\mathcal{W}^*}(\theta) = P_{\theta}[\theta_0 - 3\tau_0 \leq Y < \theta_0 - 2\tau_0] + P_{\theta}[\theta_0 + 2\tau_0 < Y \leq \theta_0 + 3\tau_0].$$

## Una Norma Combinada General

La idea detrás de la regla unilateral descrita en la sección precedente puede extenderse, y formular una regla generalizada que incluye a las que se han considerado hasta ahora. Se supone que el plano coordenado en el que se traza el gráfico de

control se divide en tres regiones disjuntas, denominadas de aceptación, advertencia y rechazo, y las cuales se denotan mediante  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{W}$  y  $\mathcal{R}$  respectivamente. Considera ahora la siguiente regla.

$\mathbf{RP}_{1-m}^g$ : Se declara que el parámetro  $\theta$  ya no coincide con su valor inicial cuando una marca se ubique en la zona  $\mathcal{R}$ , o cuando  $m$  puntos consecutivos se localicen en la región  $\mathcal{W}$ .

**Ejemplos y Discusión.** A continuación se verá como esta regla engloba las normas que se han discutido previamente.

(a) Suponga que

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \mid \theta_0 - 3\tau_0 \leq y \leq \theta_0 + 3\tau_0\}$$

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \mid y < \theta_0 - 3\tau_0 \text{ o } y > \theta_0 + 3\tau_0\}$$

$$\mathcal{W} = \emptyset$$

En este caso, la regla  $\mathbf{RP}_{1-m}^g$  se reduce a la norma básica  $\mathbf{RP}_1$ , la cual prescribe declarar que  $\theta$  se ha aterado cuando una marca en el gráfico se localice en la zona de rechazo.

(b) Considere ahora las siguientes especificaciones:

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \mid \theta_0 - 2\tau_0 \leq y \leq \theta_0 + 2\tau_0\}$$

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \mid y < \theta_0 - 3\tau_0 \text{ o } y > \theta_0 + 3\tau_0\}$$

$$\mathcal{W} = \{(x, y) \mid \theta_0 - 3\tau_0 \leq y < \theta_0 - 2\tau_0 \text{ o } \theta_0 - 3\tau_0 \geq y > \theta_0 - 2\tau_0\}$$

Para esta elección de las regiones, la regla  $\mathbf{RP}_{1-m}^g$  se reduce a la norma de paro  $\mathbf{RP}_{1-m}$  estudiada en el Capítulo 4.

(c) Suponga que

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \mid y \leq \theta_0 + 2\tau_0\}$$

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \mid y > \theta_0 + 3\tau_0\}$$

$$\mathcal{W} = \{(x, y) \mid \theta_0 + 2\tau_0 < y \leq \theta_0 + 3\tau_0\}$$

Con estas especificaciones, la norma  $\mathbf{RP}_{1-m}^g$  es la regla de paro unilateral  $\mathbf{RP}_{1-m}^+$  estudiada en la sección precedente.

(d) Ahora define

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \mid y \geq \theta_0 - 2\tau_0\}$$

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \mid y < \theta_0 - 3\tau_0\}$$

$$\mathcal{W} = \{(x, y) \mid \theta_0 - 3\tau_0 < y \leq \theta_0 - 2\tau_0\}$$

La regla de paro que se obtiene con estas prescripciones, no ha sido considerada hasta ahora, pero es análoga a la norma  $\mathbf{RP}_{1-m}^+$ , sólo que ahora de lo que se trata es de detectar disminuciones en el parámetro de interés, en vez de incrementos. Esta norma de paro se denota por  $\mathbf{RP}_{1-m}^-$ .  $\square$

A partir de la discusión precedente, es claro que la regla  $\mathbf{RP}_{1-m}^g$  representa una manera de englobar diversas normas de paro de uso común, por lo cual es interesante determinar la correspondiente longitud esperada de una corrida. Con esta finalidad, se supone que el rasgo de interés tiene valor esperado  $\theta$ , de manera que una media muestral tiene distribución  $\mathcal{N}(\theta, \tau_0^2)$ , y se define

$$\begin{aligned} p_{\mathcal{A}}(\theta) &= P_{\theta}[(i, Y_i) \in \mathcal{A}] \\ p_{\mathcal{W}}(\theta) &= P_{\theta}[(i, Y_i) \in \mathcal{W}] \\ p_{\mathcal{R}}(\theta) &= P_{\theta}[(i, Y_i) \in \mathcal{R}]. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Como antes sea  $C_k$  el estado en el cual se tienen  $k$  de observaciones consecutivas acumuladas en la zona de advertencia  $\mathcal{W}$ , Utilizando la idea de tomar esperanza condicional dado que se está ante el estado  $C_k$ , se obtiene, como antes, que para cada  $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$

$$E_{\theta}[N|C_k] = 1 + E_{\theta}[N|C_0]p_{\mathcal{A}}(\theta) + E_{\theta}[N|C_{k+1}]p_{\mathcal{W}}(\theta).$$

igualdades que en notación matricial se expresan como

$$\begin{bmatrix} 1 - p_{\mathcal{A}}(\theta) & -p_{\mathcal{W}}(\theta) & 0 & \dots & 0 \\ -p_{\mathcal{A}}(\theta) & 1 & -p_{\mathcal{W}}(\theta) & \dots & 0 \\ -p_{\mathcal{A}}(\theta) & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -p_{\mathcal{A}}(\theta) & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{\theta}[N|C_0] \\ E_{\theta}[N|C_1] \\ E_{\theta}[N|C_2] \\ \vdots \\ E_{\theta}[N|C_{m-1}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicando ahora el Teorema 2.1, se obtiene el siguiente resultado.

**Teorema 5.1.** Para la regla  $\mathbf{RP}_{1-m}^g$  se tiene que

$$E_{\theta}[N|C_k] = \frac{1 - p_{\mathcal{W}}(\theta)^{m-k}}{1 - p_{\mathcal{W}} - p_{\mathcal{A}}(\theta)(1 - p_{\mathcal{W}}(\theta)^n)}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1,$$

donde  $p_{\mathcal{A}}(\theta)$  y  $p_{\mathcal{W}}(\theta)$  son como en (5.1). En particular,

$$\mathbf{LPC}(\theta) = E_{\theta}[N|C_0] = \frac{1 - p_{\mathcal{W}}(\theta)^m}{1 - p_{\mathcal{W}} - p_{\mathcal{A}}(\theta)(1 - p_{\mathcal{W}}(\theta)^n)}.$$

Este teorema unifica todos los resultados obtenidos previamente sobre la longitud esperada de una corrida.

## Conclusión

En este capítulo, se ha estudiado la determinación de la longitud esperada de una corrida desde una perspectiva algebraica. El análisis realizado mostró que el sistema  $\mathbf{AX} = \mathbf{1}$ , considerado en la Sección 2, desempeña un importante papel en el estudio de reglas de decisión obtenidas a través de un gráfico de control, pues permite unificar resultados referentes al índice de funcionamiento de diversas normas de paro.



# EPÍLOGO

En este trabajo se ha realizado un estudio estadístico alrededor de la idea de *gráfico de control de calidad*, el cual abarcó, tanto aspecto teóricos básicos, como problemas íntimamente relacionados con su implementación práctica.

En el Capítulo 1 se discutió brevemente sobre la relación entre la estabilidad de un proceso productivo y el aseguramiento de calidad de los artículos fabricados, poniendo de relieve la importancia de mantener el estado de control estadístico del proceso de fabricación. En este punto, un gráfico de control surge como un instrumento para mantener vigilancia permanente sobre el sistema productivo, y esta idea se introdujo formalmente en el Capítulo 2, en donde, bajo la condición de unimodalidad en la distribución de las medias muestrales, se caracterizaron los límites de control que producen zonas de aceptación de anchura mínima con un nivel de inclusión determinado, y se demostró que dichos límites también minimizan la probabilidad de que la hipótesis de estabilidad del proceso sea rechazada. Otro resultado relevante contenido en esta parte del trabajo, es la generalización que se obtuvo del Teorema de Camp–Meidel sobre desviaciones de una variable aleatoria respecto a su media, permitiendo obtener una cota no paramétrica para la probabilidad de un rechazo incorrecto del supuesto de que el proceso se encuentra en el régimen de control estadístico.

En el Capítulo 3 se trató el problema de estimar los límites de control de manera óptima a través de muestras piloto, problema que es de gran importancia en las aplicaciones. En esta dirección, se estudiaron las consecuencias que, sobre la probabilidad de rechazar la hipótesis de control estadístico, tiene el empleo de

estimaciones de los límites de control en lugar de los límites reales, los cuales no son conocidos, al menos exactamente.

Por otro lado, en los Capítulos 4 y 5 se estudiaron las denominadas reglas o normas de paro, las cuales son el vehículo para trasladar la información contenida en un gráfico de control hacia decisiones concretas, i.e., revisar el proceso en busca de causas que producen la alteración del valor promedio del rasgo de interés. La contribución más importante sobre este tema, es la formulación de un resultado general, el cual permite determinar el número promedio de inspecciones que una norma de paro combinada requiere para detectar una alteración en el valor medio del rasgo relevante.

## LITERATURA CITADA

- Anderson, T. W. (1989), *Multivariate Statistics*, Wiley, New York.
- Ash, R. B. (1975), *Real Analysis and Probability*, Academic Press, New York.
- Conte, S. D. y de Boor, C. (1972), *Elementary Numerical Analysis, an Algorithmic Approach*, McGraw-Hill, New York.
- Dudewicz, E., y N. Mishra, (1988), *Modern Mathematical Statistics*, Wiley, New York.
- Duncan, A. J. (1989), *Control de Calidad y Estadística Industrial*, Alfaomega, México, D.F.
- Fulks, W. (1981), *Cálculo Avanzado*, Limusa-Wiley, México D. F.
- Graybill, F. A. (1985), *Theory and Application of the Linear Model*, Wadsworth, Belmont, CA
- Grossman, S. I. (1983), *Algebra Lineal*, Grupo Editorial Iberoamérica, México D. F.
- Harville, D. A. (1997), *Matrix Algebra from a Statistician Perspective*, Springer-Verlag, New York
- Hildebrand, F. B. (1974), *Introduction to Numerical Analysis*, McGraw-Hill, New York.
- Hildebrand, F. B. (1979), *Advanced Calculus*, Prentice-Hall, New York.
- Hoffman, k. y R. Kunze. (1973) *Algebra Lineal*, Prentice Hall Hispanoamérica, México D. F.

- John, P. W. M. (1990), *Statistical Methods in Engineering and Quality Assurance*, Wiley, New York.
- Larson, Hostetler. (1982), *Cálculo y Geometría Analítica*, McGraw-Hill, México D.F.
- Lehman, E. L. (1991), *Testing Statistical Hypothesis*, Wiley, N.Y.
- Mood, A. M., F. A. Graybill y D. C. Boes (1985), *Introduction to the Theory of Statistics*, McGraw-Hill, New York.
- Montgomery, D. C. (1985), *Statistical Quality Control*, Wiley, New York.
- Ralston, A. y P. Rabinowitz (1978), *A First Course in Numerical Analysis*, McGraw-Hill, New York.
- Sennott, L. I. (1998), *Stochastic Dynamic Programming and the Control of Queueing Systems*, Wiley, New York.
- Schilling, E. G., y Nelson, P.R. (1976), The effect of nonnormality on the control limits of  $\bar{x}$  charts, *Journal of Quality Technology*, **8**, 183–188.
- Shewart, W. A. (1931), *The Economic Control of Quality of Manufactured Product*, Van Nostrand, New York.
- Stoer, J., y R. Burlisch (1983), *Numerical Analysis*, Springer-Verlag, New York.
- Tong, Y. L. (1987), *Probability Inequalities*, Academic Press, 1987)
- Zelen, M. y N. C. Severo (1979), Probability Functions, en *Handbook of Mathematical Functions*, M. Abramowitz y I. Stegun Eds. Dover, New York, pp. 925–996.

# APÉNDICE

## Apéndice A

El propósito de este apéndice es establecer los hechos referentes a la distribución de Cauchy que fueron utilizados en el Ejemplo 2 de la Sección 4.

**Teorema A.1** Suponga que  $X_1, X_2, \dots, X_n$  son variables aleatorias independientes con densidad común

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\tau}{\tau^2 + (x - \theta)^2} \quad (\text{A.1})$$

Entonces, la media muestral

$$Y = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

también tiene la densidad (A.1).

Este resultado es interesante porque muestra explícitamente que la dispersión de la media muestral alrededor de su ‘centro’ (mediana), no tiene que ser menor que la correspondiente dispersión de las observaciones individuales  $X_i$ ; la causa de este fenómeno es, desde luego, que la distribución de Cauchy en (A.1) no tiene varianza finita. En general, los argumentos que conducen a la demostración del Teorema A.1 son bastante técnicos. Sin embargo los argumentos se simplifican utilizando el siguiente resultado preliminar: la función característica de las observaciones individuales  $X_k$  está dada por

$$E [e^{isX_k}] = e^{-\tau|s|}, \quad s \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.2})$$

Esta igualdad se obtiene, por ejemplo, en Ash (1975).

**Demostración del Teorema A.1.** Se verificará que la función característica de la media muestral  $Y$  está dada por el lado derecho de (A.2). Con esto en mente, note que para cada  $s \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} E [e^{isY}] &= E \left[ e^{is[X_1 + X_2 + \dots + X_n]/n} \right] \\ &= E \left[ e^{isX_1/n} e^{isX_2/n} \dots e^{isX_n/n} \right] \\ &= E \left[ e^{isX_1/n} \right] E \left[ e^{isX_2/n} \right] \dots E \left[ e^{isX_n/n} \right] \end{aligned}$$

donde la tercera igualdad se debe a la independencia de las variables  $X_k$ . Utilizando ahora la igualdad (A.2) con  $s/n$  en lugar de  $s$ , se desprende que

$$\begin{aligned}
 E \left[ e^{isY} \right] &= E \left[ e^{i(s/n)X_1} \right] E \left[ e^{i(s/n)X_2} \right] \dots E \left[ e^{i(s/n)X_n} \right] \\
 &= e^{-\tau|s|/n} e^{-\tau|s|/n} \dots e^{-\tau|s|/n} \\
 &= \left[ e^{-\tau|s|/n} \right]^n \\
 &= e^{-\tau|s|}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función característica de  $Y$  coincide con la función característica de las observaciones individuales  $X_k$ , y como éstas tienen la densidad de Cauchy en (A.1), se desprende que la densidad de  $Y$  también la densidad de Cauchy en la ecuación (A.1). □